

Obligatorisk opgave i Algebra 1, 2009

Afleveres senest fredag den 22/5 kl. 10.00. Se yderligere information om afleveringen på næste side.

- Om en permutation $\sigma \in S_8$ vides, at $\sigma^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ og at $\sigma^5 = (6\ 7\ 8)$. Bestem σ . Vis, at σ er lige, og bestem index af $\langle \sigma \rangle$ i A_8 .
- I en kommutativ gruppe af orden 1000 findes 4 elementer af orden 10. Vis, at gruppen er cyklisk. Angiv en kommutativ gruppe af orden 1000, der har 72 elementer af orden 10.
- Bestem antallet af abelske grupper af orden 6075 (op til isomorfi).
- Lad $\varphi: G \rightarrow G'$ være en gruppehomomorfi. Antag, at G er cyklisk. Vis, at billedgruppen $\varphi(G)$ er cyklisk.
- Lad $\varphi: C_{28} \rightarrow A_5$ være en ikke-triviel homomorfi, og lad d være ordenen af billedet. Vis, at $d \mid 28$. Vis, at $7 \nmid d$. Vis, at $d \neq 4$. Begrund, at $d = 2$. Vis, at der er 15 ikke-trivielle homomorfier $C_{28} \rightarrow A_5$.
- Betragt 5-cyklen $\sigma = (2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ som permutation i S_6 . Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ . Angiv dernæst permutationerne i centralisatoren for σ .
- Vis, at Klein's Vierer-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n , hvis og kun hvis n er lige.
- Betragt nedenstående 6 grupper:

$$G_1 := C_2 \times C_{10} \times C_{100}, \quad G_2 := C_4 \times C_4 \times C_{125}, \quad G_3 := C_4 \times C_5 \times C_{100},$$

$$G_4 := C_4 \times C_{10} \times C_{50}, \quad G_5 := C_4 \times C_{20} \times C_{25}, \quad G_6 := C_4 \times C_{500}.$$
 Bestem de par (i, j) med $i < j$ for hvilke grupperne G_i og G_j er isomorfe.
- Gruppen S_4 virker på talrummet \mathbb{R}^4 ved, for vektorer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, at permutere de 4 koordinater. Bestem isotropigruppen for vektoren $x = (0, 1, 0, 1)$, og bestem banen gennem x . Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.
- Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem?
- Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem?
- Vis, at der kun findes én homomorfi $A_4 \rightarrow C_2$.
- Lad G være en endelig abelsk gruppe og lad $\varphi: G \rightarrow G$ være en homomorfi. Vis, at hvis G er cyklisk, så gælder $\varphi^{-1}(e) \simeq G/\varphi(G)$.
- Lad $\varphi: \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \rightarrow \mathbb{Z}/4$ være en surjektiv gruppehomomorfi. Vis, at kernen, som kommutativ gruppe, er isomorf med $\mathbb{Z}/4$ eller $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Vis, at begge muligheder kan forekomme (med passende valg af φ).
- Antag, at $d \mid n$. Vis, at $[a]_n \mapsto [a]_d$ er en veldefineret homomorfi $(\mathbb{Z}/n)^* \rightarrow (\mathbb{Z}/d)^*$. Vis, at homomorfien er surjektiv, hvis n er en primtalspotens. Vis, at homomorfien er surjektiv for alle naturlige tal n . Hvor mange primiske restklasser $[a]_{2000}$ modulo 2000 opfylder, at $a \equiv 1 \pmod{5}$?

Om den obligatoriske opgave i Algebra 1, 2009.

Omstående opgave er den obligatoriske opgave i kurset Algebra 1, 2009. Godkendelse af denne opgave kræves for at man kan gå til eksamen i Algebra 1.

Som nævnt nedenfor *skal besvarelsen være individuel*. Det betyder, at hver enkelt student selvstændigt skal udforme sin besvarelse. Det præciseres her på Algebra 1 sådan: Du må gerne diskutere opgaverne med andre, og gerne ved en tavle eller et stykke papir; men du må under ingen omstændigheder skrive af – eller kopiere – hvad andre har skrevet i relation til opgaverne, og du må ikke kigge på andres besvarelser, medens du udformer din egen.

Her er en række yderligere informationer om den obligatoriske opgave:

- Besvarelsen skal afleveres senest fredag den 22/5 kl 10.00. Hvis man går på et øvelseshold, afleveres til holdets instruktør. Det er en betingelse, at man er registreret på holdet i UA-systemet. Hvis man ikke går til øvelser, træffes aftale om registrering med forelæseren.
- Alle 15 spørgsmål skal være besvaret for at opgaven kan godkendes.
- Besvarelsen skal være individuel.
- Besvarelsen skal afleveres på papir.
- Fra sin „profil“ kan man se „Bedømmelser fra UA“. Her kan man løbende følge med i sin opgaves status. Man kan komme til sin profil fra en vilkårlig SISK-hjemmeside; prøv eventuelt med linket <https://www.isis.ku.dk/myprofile/>.
- Besvarelserne er bedømt senest tirsdag den 26/5 ved øvelsernes begyndelse.
- Hvis man ikke får godkendt sin besvarelse, vil der være mulighed for at *genaflevere* efter følgende procedure:
 - Genaflevering senest kl 10.00 til instruktøren ved øvelserne fredag den 29/5.
 - Bedømmelsen foreligger senest ved øvelserne tirsdag den 2/6.
 - Eventuelle problemer herefter afklares med Anders Thorup.