Analyse 1, Prøve 1

Sættet består af 3 opgaver og er på 2 sider. Desuden er vedhæftet en forside til besvarelsen, som bedes omhyggeligt udfyldt.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift.
Aflevering i to eksemplarer på IMFs sekretariat i E-bygningen, 1. sal, lokale 04.1.03, skal ske senest mandag den 11. maj kl. 12.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering og argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum (også gerne opgaver regnet ved øvelserne), som for integrationsteoriens vedkommende udgøres af afsnittene TL 8.1-6, 9.1-2 og 9.5, herunder stillede opgaver og tilføjelser til TL.
En fyldestgørende besvarelse af denne opgave vil kunne gives på ca. 5 håndskrevne A4-sider. Den omtrentlige relative vægtning af delopgaverne er som angivet.

Opgave 1 (50%)

(a) (10%) Find en stamfunktion til funktionen

$$2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

på intervallet $(0, \infty)$.

(b) (10%) Betragt funktionen $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2) \\ 2, & x = 1/2 \\ 2 - x, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Argumenter for at h er integrabel.

(c) (15%) Vis, at en begrænset funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, der er integrabel på alle delintervaller $[c, b]$ for alle $c \in (a, b)$ er integrabel på intervallet $[a, b]$ og at

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Vink: Benyt f.eks. TL Sætning 8.3.1.

(d) (15%) Betragt, funktionen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

og lad h være funktionen fra delspørgsmål (b). Argumenter, for at $g+h$ er integrabel på intervallet $[0, 1]$ og bestem integralet

$$\int_0^1 g(x) + h(x)\, dx.$$

Vink: Man kan i denne opgave med fordel benytte resultaterne fra de tre foregående delspørgsmål også selv om man ikke har løst (b) og (c).

Opgave 2 (35%)

(a) (10%) Forklar uden brug af stamfunktioner, hvorfor

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

(b) (15%) Benyt resultatet fra (a) til at argumentere for at

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(c) (10%) Vis, at for alle hele tal $n \geq 1$ gælder vurderingerne

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

Vink: Man kan her benytte et resultat svarende til det, der bruges i beviset for Sætning 8.2.3 i TL.

Opgave 3 (15%)

Afgør om integralet

$$\int_1^\infty (e^{-x} + x)^{-1}\, dx$$

er konvergent eller divergent.

Analyse 1, 2009

Prøve 1

Eksamensnummer: ______

Antal sider (inkl. forside): ____