Analyse 1, Prøve 4

Sættet består af 3 opgaver og er på 2 sider. Desuden er vedhæftet en forside til besvarelsen, som bedes omhyggeligt udfyldt.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift.
Aflevering i to kopier på IMFs sekretariat i matematikbygningen, 1. sal, lokale 04.1.03 skal ske senest torsdag den 25. juni kl. 12.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering og argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, inklusive opgaver regnet ved øvelserne og tillæg til TL.
En fyldestgørende besvarelse af denne opgave vil kunne gives på ca. 5 håndskrevne A4-sider og bør ikke overstige 10 sider. Den omtrentlige relative vægtning af opgaverne er som angivet.

Opgave 1 (40%)

Lad
$$M = \left\{1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots\right\} \cup (1, 2] \cup \{3, 4, 5, \ldots\}.$$
På M defineres metrikken d givet ved den sædvanlige Euklidiske afstand på $\mathbb{R}$. Dvs. $d(x, y) = |x - y|$ for alle $x, y \in M$. I opgaverne (a–d) skal du afgøre om de givne mængder er eller ikke er *afsluttede* og/eller *åbne* delmængder af det metriske rum M. Argumenter for dine svar.

(a) (8%) $\{2, 3, 4, \ldots\}$

(b) (8%) $\{3, 4, \ldots\}$

(c) (8%) $(1, 2]$

(d) (8%) $\left\{1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots\right\}$

(e) (8%) Er mængden M et fuldstændigt metrisk rum?

Opgave 2 (20%)

(a) (10%) Vis at
$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$
definerer en metrik på $\mathbb{R}$. *Vink:* For at vise trekantsuligheden, kan man med fordel først vise, at funktionen $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \frac{t}{1+t}$ er voksende.

(b) (10%) Betragt mængden $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ af samtlige reelle følger $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vis at

$$d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$$

definerer en metrik på $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ og bestem $\mathrm{diam}(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}))$. (Du må benytte resultatet fra (a) selvom du ikke har besvaret det spørgsmål.)

Opgave 3 (40%)

Betragt rummet $M = C([0,1],\mathbb{R})$ af kontinuerte reelle funktioner på $[0,1]$. Vi udstyrer M med den uniforme metrik

$$d_M(f,g) = \sup\left\{|f(x)-g(x)| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\}.$$

(a) (15%) Vis at afbildningen $I : M \to \mathbb{R}$ givet ved

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

er kontinuert.

(b) (10%) Vis at afbildningen I fra (a) antager et maximum og et minimum på afslutningen af enhedskuglen

$$\overline{K(0,1)} = \left\{f \in M \;\middle|\; d_M(0,f) \le 1\right\}.$$

Her er $0 \in M$ nul-funktionen og det skal ikke eftervises, at afslutningen af kuglen er som angivet (se CB opgave 2.7).

(c) (15%) Vis, at $f_n \in M$ givet ved

$$f_n(x) = x^n,\; x \in [0,1]$$

for $n = 1, 2, \ldots$ definerer en følge (f_n) i $\overline{K(0,1)}$, som ikke har en konvergent delfølge i M og konkluder dermed at $\overline{K(0,1)}$ ikke er kompakt.

Analyse 1, 2009

Prøve 4

Eksamensnummer: ______

Antal sider (inkl. forside): ____