Analyse 1, Prøve 2

25. maj 2009

Alle henvisninger til TL er henvisninger til Kalkulus (2006, Tom Lindstrøm). Direkte opgavehenvisninger til Kalkulus er angivet med TLO, ellers er alle henvisninger til steder i de overordnede afsnit. Henvises der til en Note, er denne til "Tilføjelser og Rettelser til TL", og for Opgaver er det til de tilsvarende opgaver på ugesedlerne.

Vi tager lige tre lemmaer.

Lemma 1. *Enhver konstant følge (a_n), hvor $a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, har grænseværdi a for $n \to \infty$.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal jf. TL 4.3.1 finde et $N \in \mathbb{N}$, så $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Men da ser vi, at uanset valg af N, er $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ for et givet $n \in \mathbb{N}$. Da vil gælde, at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Altså er $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ jf. TL 4.3.1. □

Lemma 2. *Enhver konstant funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$, er kontinuert.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. For givet $b \in \mathbb{R}$ skal vi finde et $\delta > 0$, så at når x ligger i definitionsmængden for f og $|x - b| < \delta$, er $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Men sætter vi $\delta = \varepsilon$, har vi da, at $|f(x) - f(b)| = |a - a| = 0 < \delta = \varepsilon$. Når x ligger i definitionsmængden for f og $|x - b| < \delta$, har vi så, at $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, hvorpå f er kontinuert i b jf. TL 5.1.1. □

Lemma 3. *Gælder der for en funktion f, at $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, hvor $a \in \mathbb{R}$, gælder for følgen (a_n) givet ved $a_n = f(n)$ for $n \in \mathbb{N}$, at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Bevis. Antag, at $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Det vil altså sige, pr. TL 5.4.10, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $N_1 \in \mathbb{R}$, så $|f(x) - a| < \varepsilon$ for alle $x \geq N_1$. Men vælg da $N \in \mathbb{N}$, så $N \geq N_1$, jf. Arkimedes' princip, TL 2.2.6(i). Ved at omdøbe x til n, får vi altså, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$, så $|f(n) - a| = |a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N \geq N_1$. Da ser vi jf. TL 4.3.1, at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Opgave 1

Der skal for hver af følgende 5 rækker bestemmes, om den er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

Bemærkning. I opgaverne benyttes forskellige kriterier, som kvotientkriteriet og rodkriteriet. Disse kriterier er i Kalkulus givet, hvis rækker, som vi undersøger, starter ved summationsindex $n = 0$. Desværre kan det hænde, at man kommer ud for at lave nogle "ulovlige handlinger", netop hvis det er muligt at vi undersøger for et givet $n \in \mathbb{N}_0$, som så godt kan være lig 0 – her tænkes specielt med hensyn til division med 0, hvilket (stadig) er ildeset og -gjort.

Kalkulus selv gør ikke meget ud at klargøre for læseren, at det er ligegyldigt for konvergensen eller divergensen, hvor vi starter rækken: se eksemplerne efter forholdskriteriet, TL 12.2.12, hvor man ellers kunne komme ud for division med 0. Vi siger det altså endegyldigt, med hjælp fra TL 12.1.9: en rækkes konvergens eller divergens er uafhængig af, hvor man starter rækken. Lader vi derfor et $n \in \mathbb{N}$ eller $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ være givet, *i stedet* for et $n \in \mathbb{N}_0$, vil det med kvotientkriteriet eller rodkriteriet gøre ingen forskel for konvergensen eller divergensen, idet vi jo undersøger, hvad der sker i de kriterierne givne udtryk, når vi lader n blive meget stor. Grænseværdien har ikke noget med bestemte n'er at gøre herved. Vi anfører, når vi benytter denne bemærkning i det følgende.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2+1)5^{-n}$

Hertil vil vi benytte kvotientkriteriet for generelle rækker, TL 12.4.5. Lad derfor $a_n = (-1)^n(n^2+1)5^{-n}$; kvotientkriteriet vil da fortælle, om rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent eller divergent.

Vi regner derfor på følgende kvotient for et givet $n \in \mathbb{N}$ (se Bemærkning); hertil må vi dog sikre os, at $a_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ (så vi ikke deler med 0), men da $n^2+1 \geq 1 > 0$ og $5^{-n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er $(n^2+1)5^{-n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvorpå gælder, at $|a_n| = |(-1)^n(n^2+1)5^{-n}| = (n^2+1)5^{-n} > 0$ og $a_n \neq 0$.

Vi får altså for et givet $n \in \mathbb{N}$, at

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}((n+1)^2+1)5^{-(n+1)}}{(-1)^n(n^2+1)5^{-n}}\right| \\
&= \left|\frac{(-1)(n^2+2n+2)5^{-1}}{n^2+1}\right| \\
&= |-1|\left|\frac{n^2+2n+2}{5(n^2+1)}\right| \\
&= \frac{n^2+2n+2}{5n^2+5} \\
&= \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{5}{n^2}},
\end{aligned}$$

idet $n^2+2n+2 \geq 0$ og $5n^2+1 \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvorpå vi kan fjerne "plankeværket", og vi da deler med n^2 i tæller og nævner til sidst.

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ jf. en bemærkning i TL 4.3.4, gælder jf. TL 4.3.3(iii) og Lemma 1, at $0 = 2 \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}$, at $0 = 0 \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$, og at $0 = 2 \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}$, såvel som at $0 = 5 \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}$. Da $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ og $\lim_{n\to\infty} 5 = 5$ jf. Lemma 1, gælder pr. TL 4.3.3(i), at $1 = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})$ og $5 = \lim_{n\to\infty}(5+\frac{5}{n^2})$, hvorpå vi får jf. TL 4.3.3(iv), at

$$\frac{1}{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Da $\frac{1}{5} < 1$, får vi jf. TL 12.4.5, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, altså at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, jf. TL 12.4.1. Men da får vi ved TL 12.1.9, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent jf. TL 12.4.1.

Altså er $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2+1)5^{-n}$ absolut konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n! 2^{-n}$

Vi vil igen benytte kvotientkriteriet for generelle rækker, TL 12.4.5. Lad derfor $b_n = (-1)^n n! 2^{-n}$; kvotientkriteriet vil da fortælle om rækken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er absolut konvergent eller divergent.

Vi vil altså undersøge følgende kvotient for et givet $n \in \mathbb{N}_0$; vi sikrer os, at $b_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ (så vi ikke deler med 0) ved at se, at $n! \geq 1 > 0$ og $2^{-n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, er $n! 2^{-n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, hvorpå gælder, at $|b_n| = |(-1)^n n! 2^{-n}| = n! 2^{-n} > 0$ og $b_n \neq 0$. For et givet $n \in \mathbb{N}_0$ har vi da, at

$$\begin{aligned}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)! 2^{-(n+1)}}{(-1)^n n! 2^{-n}}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)(n+1)}{2}\right| \\ &= |-1|\left|\frac{n+1}{2}\right| \quad = \quad \frac{n+1}{2},\end{aligned}$$

idet $n+1 \geq 1 > 0$ for $n \geq 0$. Vi vil vise, at følgen $\left(\frac{n+1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergerer.

Lad derfor $c \in \mathbb{R}$ være givet. Vi skal finde et $N \in \mathbb{N}$, så $\frac{n+1}{2} \geq c$ for alle $n \geq N$. Men lad da N være det mindste tal i $\mathbb{N}$, der er større end $2c - 1$. Når $n \geq N$, gælder da, at $n + 1 \geq N + 1$, hvorpå vi har, at

$$\frac{n+1}{2} \geq \frac{N+1}{2} \geq \frac{2c-1+1}{2} = \frac{2c}{2} = c,$$

så der findes altså $n \in \mathbb{N}$, så $\frac{n+1}{2} \geq c$ for alle $n \geq N$ ved et givet $c \in \mathbb{R}$. Ved TL 4.3.6 får vi da, at ovenstående følge divergerer mod uendelig. Altså har vi jf. TL 4.3.6, at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \infty > 1,$$

hvorpå vi med det samme konkluderer jf. TL 12.4.5, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er divergent. Vi får da ved TL 12.1.9, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent, så vi konkluderer altså, at $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n! 2^{-n}$ er divergent.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+\ln(n)}}$

Lad $c_n = (-1)^n/\sqrt{n+\ln(n)}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da $n \geq 1 > 0$ og $\ln(n) \geq 0$, er $n + \ln(n) \geq n > 0$. Da gælder, at $\sqrt{n+\ln(n)} > 0$, og dermed, at $1/\sqrt{n+\ln(n)} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er $|c_n| = |(-1)^n||1/\sqrt{n+\ln(n)}| = 1/\sqrt{n+\ln(n)}$.

Alternerende. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da $c_n = (-1)^n|c_n|$ og $c_{n+1} = (-1)^{n+1}|c_{n+1}|$, ser vi, at c_n og c_{n+1} har forskellige fortegn, da $|c_n|$ og $|c_{n+1}|$ begge er positive størrelser og $(-1)^n \neq (-1)^{n+1}$ (disse to størrelser bestemmer fortegnene). Dermed er $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ en alternerende række.

Aftagende. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da $1 > 0$, er $n+1 > n$, og da ln er en strengt voksende funktion, er $\ln(n+1) > \ln(n)$. Men da er

$$(n+1) + \ln(n+1) > n + \ln(n+1) > n + \ln(n) > 0,$$

hvorpå $\sqrt{(n+1)+\ln(n+1)} > \sqrt{n+\ln(n)} > 0$, da kvadratrodsfunktionen er voksende. Ved at gange over kors får vi endelig, da vi ikke deler med 0, at

$$\frac{1}{\sqrt{n+\ln(n)}} = |c_n| > \frac{1}{\sqrt{(n+1)+\ln(n+1)}} = |c_{n+1}| > 0.$$

Da har vi, at $|c_{n+1}| < |c_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er følgen $(|c_n|)$ strengt aftagende, og dermed aftagende, jf. TL s. 193.

Absolutte led går imod 0. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da $\ln(n) \geq 0$, gælder, at $n + \ln(n) \geq n > 0$, da kvadratrodsfunktionen er voksende, hvorpå $\sqrt{n+\ln(n)} \geq \sqrt{n} > 0$. Da har vi, at $0 < 1/\sqrt{n+\ln(n)} \leq 1/\sqrt{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi vil vise, at $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$.

Lad derfor $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal finde et $N \in \mathbb{N}$, så $|1/\sqrt{n} - 0| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Men lad da N være det mindste tal i $\mathbb{N}$, så $N > 1/\sqrt{\varepsilon} > 0$ (hvilket kan lade sig gøre ved Arkimedes' princip, TL 2.2.6(i)). For $n \geq N > 0$, gælder da, at $\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > 0$, hvorpå $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{N}$; da har vi, at

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon,$$

hvorpå vi konkluderer, at $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$, idet vi for ethvert $\varepsilon > 0$ kan vælge $N \in \mathbb{N}$, så $|1/\sqrt{n} - 0| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

Da vi har jf. Lemma 1, at $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, kan vi nu benytte Klemmelemmaet, TLO 4.3.11, på $1/\sqrt{n+\ln(n)}$. Da $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ og

$$0 < 1/\sqrt{n+\ln(n)} \leq 1/\sqrt{n}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder jf. TLO 4.3.11, at $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n+\ln(n)} = 0$. Altså er $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$.

Konvergent. Da gælder jf. TL 12.3.1, da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er alternerende og følgen $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ er aftagende og går imod 0, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergent.

Absolut konvergent? Vi vil nu undersøge, om $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er absolut konvergent. Vi kigger derfor på rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, og vil benytte grænsesammenligningskriteriet TL 12.2.8. Lad nu rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^*$ være givet ved $c_n^* = 1/\sqrt{n} = 1/n^{1/2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dennes led er klart positive for alle $n \in \mathbb{N}$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^*$ er da positiv.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet (se evt. Bemærkning, velvidende, at der ikke er nogle problemer her). Da er

$$\frac{|c_n|}{c_n^*} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+\ln(n)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\ln(n)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\ln(n)}} = \sqrt{\frac{n}{n+\ln(n)}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\ln(n)}{n}}}.$$

Vi vil nu finde dette udtryks grænseværdi for $n \to \infty$.

Vi har jf. TL 6.3.15(a), at $\lim_{x\to\infty} \ln(x)/x = 0$ ved $a = b = 1$. Jf. Lemma 3, får vi, at der gælder for følgen $(\ln(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$, at $\lim_{n\to\infty} \ln(n)/n = 0$.

Vi har jf. Lemma 2 og TL s. 214, at funktionerne $x \mapsto 1$ og $x \mapsto x$ er kontinuerte i punktet 0. Da har vi jf. TL 5.1.5, at funktionen $x \mapsto 1 + x$ er kontinuert i punktet 0, og jf. samme, at funktionen f givet ved $f(x) = \frac{1}{1+x}$ er kontinuert i punktet 0, da $1 + 0 \neq 0$. Da funktionen g givet ved $g(x) = \sqrt{x}$ er kontinuert i punktet $1 = f(0)$, gælder da jf. TL 5.1.7, at funktionen h givet ved $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{1/(1 + x)}$ er kontinuert i punktet 0.

Idet vi lader følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved $x_n = \ln(n)/n$, ved vi fra før, at $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Da h er kontinuert i punktet 0, gælder jf. TL 5.1.10(a), at $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(0)$. Men da $h(x_n) = \sqrt{1/(1 + \ln(n)/n)}$ og $h(0) = 1$, har vi nu, at

$$1 = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{c_n^*}.$$

Vi har nu jf. TL 12.2.4, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ divergerer, idet $\frac{1}{2} < 1$.

Men da får vi jf. 12.2.8(ii), da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^*$ og $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ er positive rækker, og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^*$ divergerer, at $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ også divergerer, da $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{c_n^*} = 1 > 0$.

Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ikke absolut konvergent jf. TL 12.4.1. Men da vi fandt, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ var konvergent, må der gælde, at $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er betinget konvergent jf. TL 12.4.3.

Altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+\ln(n)}}$ betinget konvergent.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}\right)^n$

På denne række vil vi benytte den dejlige rottesten for generelle rækker, TL 12.4.6. Lad derfor $d_n = \left(\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}\right)^n$; den dejlige rottesten vil fortælle, om $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ er absolut konvergent eller divergent (se Bemærkning; vi bliver simpelthen nødt til at ændre nedre summationsgrænse til $n = 1$, idet leddet for $n = 0$ ikke eksisterer).

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da gælder for alle $a \in \mathbb{R}$, at

$$|a^n| = |\underbrace{a\cdots a}_{n}| = \underbrace{|a|\cdots|a|}_{n} = |a|^n.$$

Altså er $|a^n| = |a|^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{R}$. Lad nu $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da har vi, at

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|d_n|} &= \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}\right)^n\right|} \\ &= \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}\right|^n} \\ &= \left|\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}\right| \end{aligned}$$

Vi vil nu vise, at $\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

For $n = 1$ er $\frac{1}{2}\cos(\pi \cdot 1) + 6 \cdot 1 = \frac{1}{2}(-1) + 6 = \frac{11}{2} \geq 0$.

For $n \geq 2$ er $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, og specielt $\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, da $\pi > 0$. Da $\frac{\pi}{n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, gælder altså, at $\frac{\pi}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Da $\cos(x) \geq 0$ for $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, gælder da, at $\cos(\frac{\pi}{n}) \geq 0$ for $\frac{\pi}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dvs. for $n \geq 2$.

Da får vi for $n \geq 2$, at $\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1} \geq \frac{1}{2} \cdot 0 + 6n^{-1} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Altså har vi sammenlagt, at $\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$\sqrt[n]{|d_n|} = \left| \frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1} \right| = \frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}.$$

Da vi har jf. en bemærkning i TL 4.3.4, at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, og jf. Lemma 1, at $\lim_{n\to\infty} \pi = \pi$, har vi jf. TL 4.3.3(iii), at $0 = \pi \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}$. Da funktionen cos er kontinuert på hele $\mathbb{R}$ og specielt i 0, og følgen $(\frac{\pi}{n})$ konvergerer imod 0, har vi, jf. TL 5.1.10(a), at $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n^{-1}) = \cos(0) = 1$.

Lemma 1 giver, at $\lim_{n\to\infty} 6 = 6$ og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, så med TL 4.3.3(iii), får vi, at $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1})$ og at $0 = 6 \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} 6n^{-1}$. Vi får altså, at

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1} \right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|d_n|}.$$

Den dejlige rottesten, TL 12.4.6, giver nu, idet $\frac{1}{2} < 1$, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ er absolut konvergent (se Bemærkning).

Altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1}) + 6n^{-1}\right)^n$ absolut konvergent.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5} \right)$

Vi har, at $\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Vi ved, at den alternerende, harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergerer, jf. TL 12.3.2. Vi har nu jf. TL 12.1.7(iii), da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ er konvergent og vi sætter $c = -1$, at $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ er konvergent, og dermed at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ er konvergent.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da $n^2 > 0$, er $n^2 + 5 > 0$, hvorpå vi ser, at $\frac{1}{n^2+5} > 0$. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ er altså positiv. Ligeledes indses, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er positiv. Da $0 \leq 5$, gælder desuden, at $n^2 \leq n^2 + 5$, hvormed $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+5}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi har, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer jf. TL 12.2.4. Ved sammenligningskriteriet, TL 12.2.6(i), har vi nu, da rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er positive og da $\frac{1}{n^2+5} \leq \frac{1}{n^2}$ $(c = 1)$, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ også konvergerer.

Da rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ konvergerer, får vi nu jf. TL 12.1.7(i), at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5} \right)$ også er konvergent!

Det genstår nu bare at finde ud af, om $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5} \right)$ er absolut konvergent, altså om $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5} \right|$ er konvergent, jf. TL 12.4.1. Lad et

$n \in \mathbb{N}$ være givet. Da har vi,

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5}\right| &= \left|\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{1}{n^2+5}\right)\right| \\ &\overset{\text{TL 2.1.3}}{\geq} \left|\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| - \left|-\frac{1}{n^2+5}\right|\right| \\ &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+5}\right|,\end{aligned}$$

da vi fandt, at $\frac{1}{n^2+5} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Idet $n^2+5 \geq n^2 \geq n$, har vi da, at $\frac{1}{n^2+5} \leq \frac{1}{n}$, dvs. at $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+5} \geq 0$. Da har vi endeligt, at

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5}\right| \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+5}.$$

Da vi har jf. TL 12.2.4, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, og at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ konvergerer fra før, har vi jf. TL 12.1.8, at $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+5}\right)$ divergerer. Men da vi med ovenstående ulighed har, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+5}\right)$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5}\right|$ er positive, samt at $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+5}\right)$ divergerer, kan vi benytte TL 12.2.6(ii) ($d = 1$): da vil også $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5}\right|$ divergere.

Da er $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5}\right)$ ikke absolut konvergent jf. TL 12.4.1, men da vi fandt, at rækken var konvergent, må gælde jf. TL 12.4.3, at $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2+5}\right)$ er betinget konvergent.

Opgave 2

Det skal vises, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1+n^{-1}}\right)$$

har positive led og er konvergent.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da er $n^{-1} > 0$ og $n^{-2} > 0$, og specielt $\frac{1}{4}n^{-2} > 0$.

Vi får nu ved at lægge den positive størrelse $1 + n^{-1}$ til på begge sider af ulighedstegnet, at $1 + n^{-1} + \frac{1}{4}n^{-2} > 1 + n^{-1} > 0$.

Da vi ser, at $(1 + \frac{1}{2}n^{-1})^2 = 1 + n^{-1} + \frac{1}{4}n^{-2}$, får vi altså, at $(1 + \frac{1}{2}n^{-1})^2 > 1 + n^{-1} > 0$, og da kvadratrodsfunktionen er voksende, at $\sqrt{(1 + \frac{1}{2}n^{-1})^2} = \left|1 + \frac{1}{2}n^{-1}\right| > \sqrt{1 + n^{-1}}$.

Da vi nu har, at $1 + \frac{1}{2}n^{-1} > 1 > 0$, er $\left|1 + \frac{1}{2}n^{-1}\right| = 1 + \frac{1}{2}n^{-1}$, hvormed vi altså får, at $1 + \frac{1}{2}n^{-1} > \sqrt{1 + n^{-1}}$. Men da har vi naturligvis for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}} > 0,$$

så rækken har altså positive led, og er dermed positiv.

Vi vil vise, at rækken er konvergent. Lad nu et $n \in \mathbb{N}$ være givet.

Da er $1 + n^{-1} > 0$, hvorpå $\sqrt{1 + n^{-1}} > 0$. Da vi fandt før, at rækkens led var positive, ser vi nu ligeledes, at

$$1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}} = \left(1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}}\right) + 2\sqrt{1 + n^{-1}} > 0.$$

Altså er den konjugerede til $1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}}$ også positiv. Vi kan nu regne på det følgende udtryk, idet vi ikke ender med at dele med 0:

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}} \\
= \quad & \frac{\left(1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}}\right)}{1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}}} \\
= \quad & \frac{\left(1 + \frac{1}{2}n^{-1}\right)^2 - \left(\sqrt{1 + n^{-1}}\right)^2}{1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}}} \\
= \quad & \frac{1 + n^{-1} + \frac{1}{4}n^{-2} - \left(1 + n^{-1}\right)}{1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}}} \\
= \quad & \frac{\frac{1}{4}n^{-2}}{1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}}} \\
\leq \quad & 1 \cdot \frac{1}{4}n^{-2} \quad = \quad \frac{1}{4}n^{-2},
\end{aligned}$$

idet $1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}} > 1$, da $n^{-1} > 0$ og $\sqrt{1 + n^{-1}} > 0$, hvorpå $(1 + \frac{1}{2}n^{-1} + \sqrt{1 + n^{-1}})^{-1} < 1$.

Altså gælder, at $1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}} \leq \frac{1}{4}n^{-2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi fandt før, at den i opgaven givne række var positiv, og da $n^{-2} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ positiv. Idet vi ligeledes ved, at $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ er konvergent jf. TL 12.2.4, da $2 > 1$, kan vi kombinere dette med ovenstående ulighed, hvorpå vi jf. TL 12.2.6(i) med $c = \frac{1}{4}$ får, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2}n^{-1} - \sqrt{1 + n^{-1}}\right)$$

er konvergent.

Opgave 3

(a)

Vi vil først vise et lille lemma:

Lemma 4. *For reelle tal a, b gælder, at $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.*

Bevis. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ være givet. Da gælder, at $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, idet kvadrater er ikke-negative i $\mathbb{R}$. Vi har derfor, at $(|a| - |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|ab| \geq 0$. Isolerer vi $|ab|$ i denne ulighed, får vi da, at $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. □

Lad (a_n) være en følge af reelle tal. Der skal vises, at hvis rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$$

er konvergent, er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent.

Bevis. Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ er konvergent.

Da (a_n) er en følge af reelle tal, gælder, at $a_n \in \mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad nu $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da gælder specielt, at $n \in \mathbb{R}$, og at $n^{-1} \in \mathbb{R}$. Endvidere gælder, at $na_n \in \mathbb{R}$. Nu kan vi benytte Lemma 4 på tallene na_n og n^{-1}, hvorpå vi får, at

$$|a_n| = |na_n n^{-1}| \leq \frac{1}{2}((na_n)^2 + (n^{-1})^2) = \frac{1}{2}(n^2 a_n^2 + n^{-2}).$$

Da gælder ovenstående for alle $n \in \mathbb{N}$.

Pr. antagelse er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ konvergent, og vi ved jf. TL 12.2.4, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ er konvergent, da $2 > 1$.

Da rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ og $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ begge er konvergente, får vi jf. TL 12.1.7(i), at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^{-2})$ er konvergent.

Da $0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{2}(n^2 a_n^2 + n^{-2})$ jf. ovenstående ulighed for alle $n \in \mathbb{N}$, ser vi derpå, at $0 \leq \frac{1}{2}(n^2 a_n^2 + n^{-2}) \leq n^2 a_n^2 + n^{-2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og slutter, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ og $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^{-2})$ begge er positive.

Da vi fandt, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^{-2})$ var konvergent, har vi ved TL 12.2.6(i) med $c = \frac{1}{2}$, da $|a_n| \leq \frac{1}{2}(n^2 a_n^2 + n^{-2})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Da får vi jf. TL 12.4.1, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent. □

(b)

Først et lemma:

Lemma 5. *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv, konvergent række. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

Bevis. Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er positiv og konvergent. Vi skal vise, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent. Men da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er positiv, er $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$; da $|a_n| = a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder specielt, at $|a_n| \leq a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Jf. TL 12.2.6(i) får vi med $c = 1$ ved denne ulighed, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent. Jf. TL 12.4.1 er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. □

Der skal gives et eksempel på en følge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, men så $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ er divergent.

Lad rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være givet ved $a_n = n^{-3/2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ er konvergent jf. TL 12.2.4, da $\frac{3}{2} > 1$, og $n^{-3/2} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ (hvorpå rækken er positiv), gælder jf. Lemma 5, at rækken er absolut konvergent.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ har da led givet ved $n^2 a_n^2 = n^2(n^{-3/2})^2 = n^2 n^{-3} = n^{-1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Men da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ er divergent jf. TL 12.2.4, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ divergent.

Opgave 4

Først to lemmaer!

Lemma 6. *Nulrækken $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, hvor $a_k = 0$ for alle $k \in \mathbb{N}_0$ er konvergent med sum 0.*

Bevis. Lad $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ være nulrækken. Afsnitssummen er da $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Idet $0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} s_n$ jf. Lemma 1, konvergerer følgen af afsnitssummer $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mod 0 jf. TL 4.3.1, hvorpå vi slutter jf. TL s. 614 midten, at $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergerer imod 0. □

Lemma 7. *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv, konvergent række med sum S. Da er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent med sum S.*

Bevis. Antag, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er positiv og konvergent med sum S. Vi skal vise, at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent med sum S.

Men da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er positiv, er $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$; da $|a_n| = a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, gælder, at $|a_n| - a_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da er nulrækken $\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| - a_n)$ konvergent med sum 0, jf. Lemma 6.

Vi kan nu benytte TL 12.1.7(i) på rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| - a_n)$, idet disse er konvergente (den første pr. antagelse): da gælder, at $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + (|a_n| - a_n))$ er en konvergent række med sum $S - 0 = S$. Men da $a_n + (|a_n| - a_n) = |a_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, er $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent med sum S. □

Lad
$$a_n = \int_n^{n+1} x^3 e^{-x} dx.$$
Der skal vises, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent med sum 6.

Strategi. Hvis vi da kan vise, at rækken er positiv og konvergent med sum 6, har vi jf. Lemma 7, at rækken er absolut konvergent med sum 6.

Positiv. Vi skal vise, at $a_n = \int_n^{n+1} x^3 e^{-x} dx \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Da $x^3 \geq 0$ og $e^{-x} \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, er produktet $x^3 e^{-x} \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Da $x \mapsto 0$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x$ og $x \mapsto x^3$ er kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ jf. TL s. 214, gælder jf. TL 5.1.5, at funktionen $x \mapsto -x$ på $\mathbb{R}$, og jf. TL 5.1.7, at funktionen $x \mapsto e^{-x}$ er kontinuert på $\mathbb{R}$. Men da er funktionen $x \mapsto x^3 e^{-x}$ kontinuert på hele $\mathbb{R}$ og *specielt* på $[0, n+1]$, og *især* på $[n, n+1]$.

Men da er funktionen $f : [n, n+1] \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^3 e^{-x}$ integrabel på $[n, n+1]$ jf. TL 8.3.3. Lad nu $\Pi = \{x_0, \ldots, x_m\}$ være en (lige-)inddeling i m

dele af $[n, n+1]$, jf. TL s. 364. Da vil gælde jf. TL s. 365-366 for undersummen til $N(\Pi)$, at

$$\begin{aligned} N(\Pi) &= \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{m} \inf\{f(x) | x \in [x_i - x_{i-1}]\}(x_i - x_{i-1}) \\ & &\geq \sum_{i=1}^{m} 0(x_i - x_{i-1}) \quad = \quad 0, \end{aligned}$$

da vi fandt, at $x^3 e^{-x} \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvorpå infimum af denne funktion over et givet interval også vil være større end eller lig 0.

Da funktionen er integrabel, gælder jf. beviset for TL 8.2.4, at

$$a_n = \int_n^{n+1} x^3 e^{-x} dx \geq N(\Pi) \geq 0.$$

Da dette gælder for et givet $n \in \mathbb{N}_0$ og en hvilken som helst (lige-)inddeling Π af $[n, n+1]$, har vi, at $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da er rækken positiv.

Konvergent med sum 6. Vi vil nu undersøge rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Hvis følgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ af afsnitssummer for følgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergerer mod et tal S, vil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergere mod et tal S. Vi har altså for et givet $n \in \mathbb{N}_0$, at $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ er den n'te afsnitssum.

Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Da kan vi naturligt opskrive s_n således:

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx + \int_1^2 x^3 e^{-x} dx + \ldots + \int_n^{n+1} x^3 e^{-x} dx.$$

Vi fandt i det foregående, at funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^3 e^{-x}$ var kontinuert på hele $[0, \infty)$; da er f specielt kontinuert på intervallet $[0, n+1]$.

Da giver Note 3, at f er integrabel på ethvert afsluttet og begrænset delinterval af $[0, n+1]$ og specielt på hele $[0, n+1]$, og af Indskudsreglen (version 2) i Note 2 følger, da f er integrabel på $[0, n+1]$ og da $1, 2, \ldots, n \in [0, n+1]$, at

$$s_n = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx + \int_1^2 x^3 e^{-x} dx + \ldots + \int_n^{n+1} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{n+1} x^3 e^{-x} dx.$$

Vi definerer nu en stamfunktion på et halvåbent, ubegrænset interval, således, at en funktion $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ er stamfunktion til $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [0, \infty)$, og hvis F er kontinuert på $[a, \infty)$ (thi definitionen s. 377 øverst ikke helt synes at række).

Lad $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ være givet ved $F(x) = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$. Vi vil nu finde $F'(x)$ ved at benytte TL 6.1.3, TL 6.1.4 (her benyttes (i), (ii) og (iv)), samt TL 6.1.5. For et givet $x \in [0, \infty)$ har vi da, idet $(-e^{-x})' = -(-e^{-x}) = e^{-x}$ jf. TL 6.1.5, at

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)\right)' \\ &\overset{\text{TL 6.1.4(iv)}}{=} -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)' + (-e^{-x})'(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \\ &\overset{\text{TL 6.1.5}}{=} -e^{-x}(3x^2 + 6x + 6) + e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \\ &= x^3 e^{-x} - e^{-x}(3x^2 + 6x + 6) + e^{-x}(3x^2 + 6x + 6) \\ &= x^3 e^{-x}, \end{aligned}$$

hvor vi undervejs benyttede vores viden fra TL 6.1.3. Da er $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [0, \infty)$.

Idet funktionerne $x \mapsto x^a$, for $a \in \mathbb{R}$, og $x \mapsto c$, hvor $c \in \mathbb{R}$, er kontinuerte på $\mathbb{R}$ jf. TL s. 214 og Lemma 2, gælder at alle polynomier er kontinuerte på $\mathbb{R}$ jf. TL 5.1.5. Funktionen $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 6x + 6$ er derfor kontinuert på $\mathbb{R}$, og da funktionerne $x \mapsto 0$ og $x \mapsto e^{-x}$ er kontinuerte jf. ovenstående og Lemma 2, gælder jf. TL 5.1.5, at funktionen $x \mapsto -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$ er kontinuert på $\mathbb{R}$ og specielt på $[0, \infty)$. Heraf ses, at F er kontinuert på $[0, \infty)$.

Da er F en stamfunktion til f. Idet f var kontinuert på $[0, n+1]$ jf. ovenstående, har vi jf. TL 8.3.4, at

$$\begin{aligned} s_n = \int_0^{n+1} x^3 e^{-x} dx &= \left[-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)\right]_0^{n+1} \\ &= \left[-e^{-(n+1)}((n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 6(n+1) + 6)\right] \\ &\qquad - \left[-e^0(0^3 + 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 6)\right] \\ &= -e^{-(n+1)}(n^3 + 6n^2 + 15n + 16) + 1 \cdot 6 \\ &= 6 - \left(\frac{e^{-1}n^3}{e^n} + \frac{6e^{-1}n^2}{e^n} + \frac{15e^{-1}n}{e^n} + \frac{16e^{-1}}{e^n}\right). \end{aligned}$$

Vi vil nu vise, at dette går imod 6 for $n \to \infty$.

Vi har jf. TL 6.3.15(b), at $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, idet vi sætter $b = 1, 2, 3$ og $a = 1$. Vi får da jf. Lemma 3 for de tilsvarende følger, at $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ og $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$.

Idet $e^n \geq n$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, gælder, at $\frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{n}$, og vi ser, at $\frac{1}{e^n} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Benytter vi klemmelemmaet TLO 4.3.11 på uligheden $0 \leq \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{n}$, samt vores viden jf. Lemma 1 og en bemærkning i TL 4.3.4, at $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, får vi, at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

Jf. Lemma 1, får vi, at $\lim_{n\to\infty} e^{-1} = e^{-1}$, $\lim_{n\to\infty} 6e^{-1} = 6e^{-1}$, $\lim_{n\to\infty} 15e^{-1} = 15e^{-1}$ og $\lim_{n\to\infty} 16e^{-1} = 16e^{-1}$.

Vi får da, jf. ovenstående konvergenser og TL 4.3.3(iii), at $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1}n^3}{e^n}$, $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{6e^{-1}n^2}{e^n}$, $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{15e^{-1}n}{e^n}$ og $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{16e^{-1}}{e^n}$.

Summen af disse fire følger vil da også gå imod 0, jf. TL 4.3.3(i).

Da vi får jf. Lemma 1, at $\lim_{n\to\infty} 6 = 6$, har vi jf. TL 4.3.3(ii), at $6 = 6 - 0 = \lim_{n\to\infty}(6 - (\frac{e^{-1}n^3}{e^n} + \frac{6e^{-1}n^2}{e^n} + \frac{15e^{-1}n}{e^n} + \frac{16e^{-1}}{e^n})$.

Men da har vi jf. ovenstående lighed, at

$$6 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n+1} x^3 e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Men da konvergerer $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mod tallet 6 jf. TL 4.3.1, og jf. TL s. 624 gælder da, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer imod 6, at den er konvergent med sum 6.

Absolut konvergent med sum 6. Da gælder jf. Lemma 7, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent med sum 6.