Analyse 1, Prøve 3

8. juni 2009

Alle henvisninger til TL er henvisninger til Kalkulus (2006, Tom Lindstrøm). Direkte opgavehenvisninger til Kalkulus er angivet med TLO, ellers er alle henvisninger til steder i de overordnede afsnit. Henvises der til en Note, er denne til "Tilføjelser og Rettelser til TL", og for Opgaver er det til de tilsvarende opgaver på ugesedlerne.

Lemma 1. *Enhver konstant følge (a_n), hvor $a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, har grænseværdi a for $n \to \infty$.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal jf. TL 4.3.1 finde et $N \in \mathbb{N}$, så $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Men da ser vi, at uanset valg af N, er $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ for et givet $n \in \mathbb{N}$. Da vil gælde, at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Altså er $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ jf. TL 4.3.1. $\square$

Lemma 2. *Enhver konstant funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$, er kontinuert.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. For givet $b \in \mathbb{R}$ skal vi finde et $\delta > 0$, så at når x ligger i definitionsmængden for f og $|x - b| < \delta$, er $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Men sætter vi $\delta = \varepsilon$, har vi da, at $|f(x) - f(b)| = |a - a| = 0 < \delta = \varepsilon$. Når x ligger i definitionsmængden for f og $|x - b| < \delta$, har vi så, at $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, hvorpå f er kontinuert i b jf. TL 5.1.1. $\square$

Opgave 1

(a)

Der skal bestemmes konvergensradius og sumfunktion for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}.$$

Lad $\mathcal{G} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ være givet ved $\mathcal{G}(x) = \frac{1}{1-x}$. $\mathcal{G}$ er sumfunktion for potensrækken med $a = 0$ og $a_n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ (jf. TL. s. 660) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, som er den geometriske række med $r = x$ og konvergensinterval $x \in (-1, 1)$ jf. TL 12.1.1. Ved TL 12.7.3 har vi, at $\mathcal{G}$ er differentiabel for alle $x \in (-1, 1)$, og at

$$\mathcal{G}'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot 1 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

idet vi benytter TL 6.1.3 og TL 6.1.5; konvergensintervallet for denne række er $(-1, 1)$ jf. Bemærkning TL s. 671.

Lader vi $G : (-1,1) \to \mathbb{R}$ være givet ved $G(x) = x\mathcal{G}'(x)$ og et $x \in (-1,1)$ være givet, vil

$$\begin{aligned} G(x) &= x\mathcal{G}'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 0x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \end{aligned}$$

jf. TL 12.1.7(iii), idet vi lader $c = x$. Rækken konvergerer for $x \in (-1,1)$, da konvergensen er bestemt af konvergensen for $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, og vi lod x være givet, så både den oprindelige og nye række konvergerede. Da $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ er en potensrække (jf. TL s. 660) med $a_n = n$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ og konvergensinterval $(-1,1)$, er G jf. TL 12.7.3 differentiabel for alle $x \in (-1,1)$, og

$$G'(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n,$$

da vi benytter TL 6.1.3 og TL 6.1.5, og konvergensintervallet for rækken er da igen $(-1,1)$ jf. Bemærkning TL s. 671.

Lader vi nu $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(x) = xG'(x)$ og et $x \in (-1,1)$ være givet, vil

$$\begin{aligned} g(x) &= xG'(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = 0^2x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n, \end{aligned}$$

jf. TL 12.1.7(iii), idet vi lader $c = x$. Ovenstående række vil nødvendigvis konvergere for $x \in (-1,1)$ ved konvergensintervallet for $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, og vi lod x være givet, så både den oprindelige og nye række konvergerede.

Altså er g sumfunktion for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$ med konvergensinterval $(-1,1)$, og denne række har konvergensradius 1 jf. TL 12.6.1, idet vi kræver for x, at $|x| < 1$. Altså vil rækken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2y^n$ naturligvis konvergere for $|y| < 1$.

Sæt da $y = x^2$; da vil rækken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{2n}$ konvergere for $|y| = |x^2| = x^2 < 1$, altså for $x \in (-1,1)$. Konvergensradius for potensrækken er derfor 1, da rækken konvergerer for $|x| < 1$, idet det tilhørende konvergensinterval er bibeholdt hele vejen igennem udregningerne.

Lad nu $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = g(x^2)$, og lad $x \in (-1,1)$ være givet. Da er $x^2 \in (-1,1)$, hvorpå

$$f(x) = g(x^2) = \frac{x^4+x^2}{(1-x^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{2n},$$

og ovenstående række konvergerer for $(-1,1)$. Vi har derfor, at den ønskede sumfunktion for den i opgaven givne potensrække er $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{x^4+x^2}{(1-x^2)^3}.$$

(Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ divergerer jf. TL 12.1.4, så der er ikke konvergens i endepunkter -1 og 1.)

(b)

Der skal bestemmes konvergensradius og sumfunktion for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}.$$

Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet. Vi har jf. TL 12.8.2, at $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$ for alle $y \in \mathbb{R}$. Sætter vi specielt $y = x^2 \in \mathbb{R}$, at

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}.$$

Denne række konvergerer altså mod e^{x^2} for alle $x \in \mathbb{R}$. Lad nu igen $x \in \mathbb{R}$ være givet. Da har vi jf. TL 12.1.7(iii) ved anden lighed i søjlen af lighedstegn, at

$$\begin{aligned}
e^{x^2}(2x^2+1) = 2x^2 e^{x^2} + e^{x^2} &= 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^2}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^{2n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(n+1)!} x^{2(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \frac{2 \cdot 0}{0!} x^{2 \cdot 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n},
\end{aligned}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$, da vi lod $x \in \mathbb{R}$ være givet. Sidste lighedstegn kommer af TL 12.1.7(i), idet vi ved, at ledrækkerne konvergerer henholdsvis mod $2x^2 e^{x^2}$ og e^{x^2}, jf. TL 12.1.7(iii). Konvergensradius for potensrækken er altså ∞ jf. TL 12.6.1, idet vi derpå ved, at den i opgaven givne potensrække, som vi har ovenstående, konvergerer mod

$$f(x) = e^{x^2}(2x^2+1)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Ovenstående funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er derpå potensrækkens sumfunktion.

(c)

Summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{4^n}$$

skal bestemmes. Vi bemærker, at rækken kan skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

Lad $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ være givet ved $f(x)=\frac{1}{1-x}$. f er sumfunktion for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, som er den geometriske række med $r=x$ og konvergensinterval $x\in(-1,1)$ jf. TL 12.1.1 (se starten på 1(a)). Ved TL 12.7.3 får vi, at f er differentiabel for alle $x\in(-1,1)$, og at

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot 1\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

idet vi benytter TL 6.1.3 og TL 6.1.5; rækken konvergerer for $x\in(-1,1)$ jf. Bemærkning TL s. 671.

Altså konvergerer potensrækken med sumfunktion f' også for $x=-\frac{1}{4}$, og vi har, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ dermed har en sum, $f'(-\frac{1}{4})$; vi får, at

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{4^n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{(\frac{5}{4})^2}=\frac{16}{25}.$$

Altså er summen for den i opgaven givne række lig $\frac{16}{25}$.

Opgave 2

(a)

Vi husker på, jf. TL 11.3.5, at

$$d_A(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|\mid x\in A\}.$$

Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en funktionsfølge, der konvergerer punktvis på et lukket og begrænset interval $[a,b]$ og uniformt på det åbne interval (a,b). Der skal vises, at følgen konvergerer uniformt på hele $[a,b]$.

Bevis. Lad $\varepsilon>0$ være givet, og lad funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opfylde ovenstående, med grænsefunktion f (da er f_n og f defineret på $[a,b]$ for alle $n\in\mathbb{N}$).

Da vi derpå for et givet $x\in[a,b]$ har, at talfølgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $f(x)$ grundet den punktvise konvergens, kan vi derfor, jf. TL 4.3.1, vælge $N_1\in\mathbb{N}$, så $|f_n(a)-f(a)|<\varepsilon$ for alle $n\geq N_1$, og vælge $N_2\in\mathbb{N}$, så $|f_n(b)-f(b)|<\varepsilon$ for alle $n\geq N_2$, da $\lim_{n\to\infty}f_n(a)=f(a)$ og $\lim_{n\to\infty}f_n(b)=f(b)$ jf. TL 11.3.1.

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod f på (a,b) er $\lim_{n\to\infty}d_{(a,b)}(f_n,f)=0$ jf. TL 11.3.6. Vi kan da jf. TL 4.3.1 vælge $N_3\in\mathbb{N}$, så $d_{(a,b)}(f_n,f)<\varepsilon$ for alle $n\geq N_3$.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Vi har da, at $|f_n(a) - f(a)|$ og $|f_n(b) - f(b)|$ er indeholdt i mængden $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\}$; supremum $d_{[a,b]}(f_n, f)$ af mængden ville derfor være lig enten $|f_n(a) - f(a)|$ og/eller $|f_n(b) - f(b)|$, hvis en/begge af disse var det største element i mængden.

Er dette ikke tilfældet (hvis $d_{[a,b]}(f_n, f) \neq |f_n(a) - f(a)|$ og $d_{[a,b]}(f_n, f) \neq |f_n(b) - f(b)|$), må supremum over det lukkede interval nødvendigvis være lig supremum over det tilsvarende åbne interval; altså, så $d_{[a,b]}(f_n, f) = d_{(a,b)}(f_n, f)$. Vi konkluderer altså, at

$$d_{[a,b]}(f_n, f) \;=\; \max\{|f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)|, d_{(a,b)}(f_n, f)\}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$; det lukkede, begrænsede interval $[a,b]$ består jo netop af endepunkter a og b samt det åbne, begrænsede interval (a,b), og supremum over $[a,b]$ må netop være det største af de tre ovenstående.

Lad nu $N = \max\{N_1, N_2, N_3\} \in \mathbb{N}$. Da gælder for alle $n \geq N$, at

$$d_{[a,b]}(f_n, f) \;=\; \max\{|f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)|, d_{(a,b)}(f_n, f)\} \;<\; \varepsilon.$$

Dermed kan vi for ethvert $\varepsilon > 0$ finde $N \in \mathbb{N}$, så $d_{[a,b]}(f_n, f) < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Vi slutter jf. TL 4.3.1, at $\lim_{n\to\infty} d_{[a,b]}(f_n, f) = 0$, og jf. TL 11.3.6, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod f på hele $[a,b]$. $\square$

(b)

Lad nu

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (\cos(\pi x))^{2n}}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$. Vi vil vise, at funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer punktvis på hele $\mathbb{R}$, og finde grænsefunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lad først $x \in \mathbb{Z}$ være givet. Da vil $\cos(\pi x)$ være enten lig -1 eller 1, hvorpå vi slutter, at $(\cos(\pi x))^{2n} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da vil for alle $n \in \mathbb{N}$ gælde, idet f_n er defineret på $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, at

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (\cos(\pi x))^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Jf. Lemma 1 vil $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{2}$ for alle $x \in \mathbb{Z}$, og vi slutter, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer punktvis mod grænsefunktionen $x \mapsto \frac{1}{2}$ på $\mathbb{Z}$ jf. TL 11.3.1.

Da $\cos(\pi x)$ netop kun er lig -1 og 1 for $x \in \mathbb{Z}$ og kun antager værdier i intervallet $[-1, 1]$, kan vi slutte, idet vi nu lader $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ være givet, at $\cos(\pi x) \in (-1, 1)$.

Da må gælde, at $(\cos(\pi x))^2 \in [0, 1)$, og at $(\cos(\pi x))^{2n} \to 0$ for $n \to \infty$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er defineret på $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Vi får derfor ved Lemma 1 med $a = 1$, samt TL 4.3.3(i) og TL 4.3.3(iv), idet $1 \neq 0$, at

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (\cos(\pi x))^{2n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$$

for $n \to \infty$. Altså har vi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, og at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer punktvis mod grænsefunktionen $x \mapsto 1$ på $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ jf. TL 11.3.1.

Det er indlysende, at $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$. Idet vi definerer funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{for } x \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

har vi derpå, at $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Jf. TL 11.3.1 konvergerer $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktvis på $\mathbb{R}$ mod f, som derpå er den ønskede grænsefunktion.

(c)

Lad $c, d \in (0, 1)$ være givet således, at $0 < c < d < 1$. Der skal vises, at funktionsfølgen fra 2(b) konvergerer uniformt på intervallet $[c, d]$.

Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet. Vi vil nu gerne vise, at $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi har, at $\cos(\pi x) \in [-1, 1]$, og følgende, at $0 \leq (\cos(\pi x))^2 \leq 1$. Lad nu $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da vil ligeså gælde, at $0 \leq \cos(\pi x))^{2n} \leq 1$. Heraf får vi, at

$$(\cos(\pi x))^{2(n+1)} = (\cos(\pi x))^{2n}(\cos(\pi x))^2 \leq (\cos(\pi x))^{2n} \cdot 1 = (\cos(\pi x))^{2n}.$$

Det følger af at lægge 1 til på begge sider og at gange over kors, at

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (\cos(\pi x))^{2n}} \leq \frac{1}{1 + (\cos(\pi x))^{2(n+1)}} = f_{n+1}(x),$$

hvorpå $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in \mathbb{R}$. Vi har altså, at følgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ er voksende for alle $x \in \mathbb{R}$, og dermed at funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er voksende.

Idet grænsefunktionen $f(x) = 1$ for alle $x \in (0, 1)$, vil der for alle $x \in [c, d]$ gælde, at $f(x) = 1$, og dermed jf. Lemma 2, at funktionen er kontinuert på dette interval (konstante funktioner er kontinuerte!).

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dermed er en voksende funktionsfølge, der konvergerer punktvis på $[c, d]$ mod funktionen f, der er kontinuert på det lukkede, begrænsede interval $[c, d]$, (hvor vi fandt konvergensen i 2(b)), har vi jf. Dinis sætning TL 11.3.10, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod f på $[c, d]$.

Da vi lod c og d være givet, har vi følgende, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt på alle intervaller $[c, d]$ for hvilke $0 < c < d < 1$.

(d)

Vi skal vise, at funktionsfølgen fra 2(b), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ikke konvergerer uniformt på det åbne interval $(0, 1)$.

Vi har, at $1 + (\cos(\pi x))^{2n} \geq 1 > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$. Med dette får vi jf. TL s. 214 (trigonometriske funktioner er kontinuerte), samt Lemma 2, TL 5.1.5 og TL 5.1.7, at f_n er kontinuert på $\mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi husker, at f fra 2(b) var grænsefunktionen for $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Lad δ opfylde, at $\delta \in (0, 1)$; for alle x som opfylder at $0 < |x| < \delta$, har vi, at $|f(x)-1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$, hvorpå vi slutter jf. TL 5.4.1, at $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Men da $\lim_{x\to 0} f(x) \neq \frac{1}{2} = f(0)$, har vi jf. TL 5.4.7, at f ikke er kontinuert i 0, og derfor ikke kontinuert på intervallet $[0, 1]$ jf. TL 5.1.11.

Ved kontraposition af TL 11.3.8 får vi – idet f og $f_1, f_2, f_3, \ldots$ er funktioner, der er defineret på det lukkede, begrænsede interval $[0, 1]$ og vi ved, at f ikke er kontinuert på $[0,1]$ – enten at funktionerne $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ikke er kontinuerte, eller også at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer uniformt mod f på $[0,1]$.

Men da vi jo fandt, at $f_1, f_2, f_3, \ldots$ **var** kontinuerte i det foregående, må der ved denne kontraposition (og udelukkelsesmetoden) gælde, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer uniformt mod f på $[0,1]$.

Vi vil nu tilsvarende kontraponere vores sætning i 2(a): vi ved nemlig, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer uniformt mod f på $[0,1]$. Deraf kan vi slutte enten at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer punktvis mod f på $[0,1]$, eller at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer uniformt mod f på $(0,1)$.

Men da vi ved fra 2(b), at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faktisk konvergerer punktvis mod f på hele $\mathbb{R}$, og dermed også på $[0,1]$, må der nødvendigvis gælde ved kontrapositionen (og udelukkelsesmetoden), at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerer uniformt mod f på $(0,1)$, hvilket var, hvad vi skulle vise.

Opgave 3

(a)

Der skal vises, at hvis der findes en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med positiv konvergensradius $r > 0$, hvis sumfunktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ løser differentialligningen

$$f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) = 0, \tag{1}$$

for alle $x \in (-r, r)$, da er

$$a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+1} \tag{2}$$

for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bevis. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med positiv konvergensradius $r > 0$ opfylde, at dens sumfunktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ løser ovenstående differentialligning for alle $x \in (-r, r)$.

Lad $x \in (-r, r)$ være givet. Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jf. TL 12.6.1, og der gælder, at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jf. TL 12.7.3 har vi, at f er differentiabel på $(-r, r)$, og vi får, at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

og ved, at ovenstående række(r) tilsvarende konvergerer for $x \in (-r, r)$ jf. bemærkningen TL s. 671.

Ligeså er $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ en potensrække med konvergensradius $r > 0$, og sumfunktionen f' er jf. TL 12.7.3 differentiabel på $(-r, r)$, med

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n,$$

og ovenstående række konvergerer også for $x \in (-r, r)$ jf. bemærkningen TL s. 671.

Ved ovenstående har vi for $x \in (-r, r)$ dermed rækker, der konvergerer mod $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$, og disse kan vi indsætte i differentialligningen (1) og benytte regneregler TL 12.1.7(iii) og TL 12.1.7(i), således, at

$$\begin{aligned}
f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) &= \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + 2\cdot 0\cdot a_0\cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n &= \\
\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + 2na_n x^n + 4a_n x^n\right] &= \\
\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n + 4a_n\right]x^n &= 0,
\end{aligned}$$

jf. (1). Bemærk, at ovenstående udregninger og omskrivninger udelukkende kan benyttes for $x \in (-r, r)$, idet vi ellers ikke ville kunne regne med rækker, som ikke var konvergente.

Hvis der for alle $x \in (-r, r)$ skal gælde, at ovenstående ligning er opfyldt, må der nødvendigvis gælde for alle $n \in \mathbb{N}_0$, at

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n + 4a_n = 0.$$

Dette fås nemlig ved TL 12.8.3, idet ovenstående række skal konvergere imod 0 for alle $x \in (-r, r)$ ifølge antagelsen, hvorpå sumfunktionen må være lig 0 for alle $x \in (-r, r)$. Da Taylor-rækken til $x \mapsto 0$ er $\sum_{n=0}^{\infty} 0$, følger ovenstående for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Isolerer vi a_{n+2} i denne ligning, får vi, at

$$a_{n+2} = -\frac{2na_n + 4a_n}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2a_n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2a_n}{n+1},$$

som jo var (2). Altså har vi fundet, at hvis der findes en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent i $(-r, r)$ med sumfunktion f som løser (1), da vil (2) være opfyldt, og dette for alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

(b)

Vi skal finde sumfunktionen f til potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradius $r > 0$, der opfylder (2) og $a_0 = 0$ samt $a_1 = 1$.

Lad os først undersøge de lige og ulige koefficienter a_n for en sådan potensrække for sig, altså a_{2n} for $n \in \mathbb{N}_0$ og a_{2n+1} for $n \in \mathbb{N}_0$. Fra $a_0 = 0$ har vi, at

$$a_2 = a_{0+2} = -\frac{2\cdot 0}{0+1} = 0,\ a_4 = a_{2+2} = -\frac{2\cdot 0}{2+1} = 0,\ a_6 = -\frac{2\cdot 0}{4+1} = 0,\ \ldots$$

og fra $a_1 = 1$ har vi, at

$$a_3 = -\frac{2\cdot 1}{1+1} = -1,\ a_5 = -\frac{2\cdot(-1)}{3+1} = \frac{1}{2},\ a_7 = -\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{5+1} = -\frac{1}{6},\ \ldots$$

Vi får heraf en idé om at $a_{2n} = 0$ og $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, hvilket vi beviser ved induktion.

Lige koefficienter a_{2n} lig 0 for $n \in \mathbb{N}_0$. Induktionsstarten ($n = 0$) er klart opfyldt, da vi antog for potensrækken, at $a_0 = 0$. Antag nu, at $a_{2n} = 0$. Da er

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = -\frac{2a_{2n}}{2n+1} = -\frac{0}{2n+1} = 0.$$

Altså har vi ved princippet om simpel induktion vist, at $a_{2n} = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ ud fra antagelsen, at $a_0 = 0$.

Ulige koefficienter a_{2n+1} lig $(-1)^n/n!$ for $n \in \mathbb{N}_0$. Induktionsstarten ($n = 0$) er opfyldt, da $a_{2\cdot 0+1} = a_1 = 1 = (-1)^0/0!$. Antag nu, at $a_{2n+1} = (-1)^n/n!$. Da er

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+1+2} = -\frac{2a_{2n+1}}{2n+1+1} = -\frac{2\frac{(-1)^n}{n!}}{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Altså har vi ved princippet om simpel induktion vist, at $a_{2n+1} = (-1)^n/n!$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ ud fra antagelsen, at $a_1 = 1$.

Heraf får vi, da $a_{2n} = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, at vores potensrække er på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 0x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

jf. TL 12.1.7(i). Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet. Idet vi har jf. TL 12.8.2, at $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$ for alle $y \in \mathbb{R}$, har vi, idet dette specielt gælder for $y = -x^2$, at

$$xe^{-x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1},$$

idet vi ganger x på ved TL 12.1.7(iii).

Vi har altså, at ovenstående potensrække konvergerer imod xe^{-x^2} for alle $x \in \mathbb{R}$, og dermed får vi, at den ønskede sumfunktion for potensrækken er $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = xe^{-x^2}$.

Idet vi lader $x \in \mathbb{R}$ være givet, har vi med f jf. TL 6.1.3, TL 6.1.4 og TL 6.1.5, at

$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2},$$

og at

$$f''(x) = (-4x)e^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2},$$

hvorpå vi med dette $x \in \mathbb{R}$ til sidst får, at

$$\begin{aligned} f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) &= \\ (4x^3 - 6x)e^{-x^2} + 2x(1 - 2x^2)e^{-x^2} + 4xe^{-x^2} &= \\ e^{-x^2}(4x^3 - 6x + 2x - 4x^3 + 4x) &= 0, \end{aligned}$$

og vi ser her, at vores fundne sumfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ løser differentialligningen (1) fra 3(a).

(c)

Konvergensradius skal bestemmes for den potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som ligeledes opfylder (2), samt $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$. På samme måde som i 3(b) undersøger vi a_{2n} for $n \in \mathbb{N}_0$ og a_{2n+1} for $n \in \mathbb{N}_0$, hvorpå vi ser, at

$$a_3 = a_{1+2} = -\frac{2 \cdot 0}{1+1} = 0, \; a_5 = a_{3+2} = -\frac{2 \cdot 0}{3+1} = 0, \; a_7 = -\frac{2 \cdot 0}{5+1} = 0, \; \ldots$$

og

$$a_2 = -\frac{2 \cdot 1}{0+1} = -2, \; a_4 = -\frac{2 \cdot (-2)}{2+1} = \frac{4}{3}, \; a_6 = -\frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{4+1} = -\frac{8}{15},$$

$$a_8 = -\frac{2 \cdot (-\frac{8}{15})}{6+1} = \frac{16}{105}, \; \ldots$$

og vi gætter heraf på, at $a_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}$ og $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Vi vil igen vise dette ved induktion.

Lige koefficienter a_{2n} lig $\frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}$ for $n \in \mathbb{N}_0$. Induktionsstarten ($n = 0$) er opfyldt, da $a_0 = 1 = \frac{(-1)^0 2^0 0!}{0!}$. Antag nu, at $a_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}$. Da er

$$\begin{aligned} a_{2(n+1)} &= a_{2n+2} = -\frac{2a_{2n}}{2n+1} = -\frac{(-1)^n 2^{2n+1} n!}{(2n)! 2n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} n! 2(n+1)}{(2n+1)!(2n+2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2^{2(n+1)} (n+1)!}{(2(n+1))!}. \end{aligned}$$

Altså har vi ved princippet om simpel induktion vist, at $a_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ ud fra antagelsen, at $a_0 = 1$.

Ulige koefficienter a_{2n+1} lig 0 for $n \in \mathbb{N}_0$. Induktionsstarten ($n = 0$) er klart opfyldt, da vi antog, at $a_1 = 0$. Antag nu, at $a_{2n+1} = 0$. Da er

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+1+2} = -\frac{2a_{2n+1}}{2n+1+1} = -\frac{2 \cdot 0}{2n+2} = 0.$$

Altså har vi ved princippet om simpel induktion vist, at $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ ud fra antagelsen, at $a_1 = 0$.

Da altså $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, er den ønskede potensrække givet ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{3}$$

jf. TL 12.1.7(i). Konvergensradius for denne potensrække bestemmes ved hjælp af kvotientkriteriet, TL 12.4.5, idet vi sætter b_n lig ovenstående sumled og lader $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}_0$ være givet, hvorpå

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2(n+1)} (n+1)! x^{2n+2} (2n)!}{(2(n+1))! (-1)^n 2^{2n} n! x^{2n}} \right| = \left| -x^2 \frac{4(n+1)!(2n)!}{(2n+2)! n!} \right| \\ &= x^2 \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = x^2 \frac{2}{2n+1} \to 0 \end{aligned}$$

for $n \to \infty$. Da det altså gælder uanset hvilket $x \in \mathbb{R}$, at $|\frac{b_{n+1}}{b_n}| \to 0 < 1$ for $n \to \infty$, konvergerer potensrækken absolut jf. TL 12.4.5 for alle $x \in \mathbb{R}$ og konvergensradius er ∞ jf. TL 12.6.1.

Da potensrækken, som vi har fundet, konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$, har denne en sumfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} x^{2n}.$$

Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet. Der vil, jf. TL 12.7.3, ergo hvad vi fandt i udregningerne 1(a) for sumfunktionen f til en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, der er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$, gælde, at

$$f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n + 4a_n\right] x^n. \qquad (4)$$

Vi koncentrerer os nu om i den i opgaven fundne potensrække i (3). Vi fandt ovenfor, at der gjaldt for ulige a_n i denne, at $a_n = 0$ (ud fra de i opgaven givne betingelser), hvorpå koefficienten til x^n i (4) for ulige n er lig 0, da ulige n medfører, at $n + 2$ er ulige, hvorpå også $a_{n+2} = 0$.

Alle tilbageværende led i rækken er da de lige (dem for hvilke $n = 2m$, hvor $m \in \mathbb{N}_0$). Koefficienten til x^n i (4), hvor $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}_0$, er da på formen

$$(2m+1)(2m+2)a_{2m+2} + 2 \cdot 2m \cdot a_{2m} + 4a_{2m}.$$

Idet vi ved for den fundne potensrække i (3) (hvilken vi fandt ud fra (2), samt $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$), at $a_{2m} = \frac{(-1)^m 2^{2m} m!}{(2m)!}$ for alle $m \in \mathbb{N}_0$, kan vi indsætte dette i ovenstående udtryk:

$$\begin{aligned}
& (2m+1)(2m+2)a_{2m+2} + 2 \cdot 2m \cdot a_{2m} + 4a_{2m} \\
= \; & (2m+1)(2m+2)a_{2(m+1)} + (4m+4)a_{2m} \\
= \; & (2m+1)(2m+2)\frac{(-1)^{m+1} 2^{2(m+1)} (m+1)!}{(2m+2)!} + 4(m+1)\frac{(-1)^m 2^{2m} m!}{(2m)!} \\
= \; & (-1)\frac{(-1)^m 2^{2m+2} (m+1)!}{(2m)!} + \frac{(-1)^m 2^{2m+2} (m+1)!}{(2m)!} \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

hvorpå vi ser ligeledes, at koefficienten til x^n i (4) for lige n vil være 0. Vi har derfor, at koefficienten til x^n i (4) vil være 0 for **alle** $n \in \mathbb{N}_0$, og dermed, at

$$f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Dermed har vi, at vores sumfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder differentialligningen (1).