Analyse 1, Prøve 4

25. juni 2009

Alle henvisninger til CB er henvisninger til Metriske Rum (1997, Christian Berg), alle henvisninger til TL er til Kalkulus (2006, Tom Lindstrøm), og alle henvisninger til Opgaver er til de tilsvarende opgaver på ugesedlerne.

Opgave 1

Lad

$$M = \{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup (1,2] \cup \{3,4,5,\ldots\}.$$

På M defineres metrikken d ved den sædvanlige euklidiske metrik i $\mathbb{R}$ ved $d(x,y) = |x-y|$ for alle $x, y \in M$, hvorpå (M,d) er et metrisk rum. Der skal i (a-d) afgøres om delmængderne af M er åbne og/eller afsluttede.

(a) $A = \{2,3,4,5,\ldots\}$

Lad $r > 0$ være givet. Da $r+1 > 1$, hvorpå $r(r+1) > r$, har vi, at $0 < \frac{r}{r+1} < r$, hvorpå $2 - r < 2 - \frac{r}{r+1}$ og $2 - \frac{r}{r+1} \in K(2,r)$.

Men vi har øjensynligt, at $2 - \frac{r}{r+1} \notin A$, og derfor, da vi lod $r > 0$ være givet, at $K(2,r) \nsubseteq A$ for alle $r > 0$. Dermed har vi jf. negation af CB 2.1, at $2 \in A$ ikke er et indre punkt i A, og da gælder *ikke*, at ethvert punkt i A er indre punkt i A, og derfor er A ikke åben i M jf. CB 2.4.

> **En lille reminder om mængder:** $A \subseteq B$, hvis der for alle $x \in A$ gælder, at $x \in B$. Negerer vi dette, får vi, at $A \nsubseteq B$, hvis der eksisterer et $x \in A$, så $x \in A \wedge x \notin B$, hvilken er situationen ovenfor.

Vi har, at $\complement A = \{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup (1,2)$. Lad $a \in \complement A$ være givet. Da er $a < 2$. Sæt $r = d(2,a) = |2-a| = 2-a > 0$. Da vi har, at

$$\begin{aligned} K(a,r) &= \{x \in M \,|\, d(a,x) < r\} \\ &\overset{\clubsuit}{=} \{x \in M \,|\, 2(a-1) < x < 2\} \subseteq \{x \in M \,|\, x < 2\} = \complement A, \end{aligned}$$

er a indre punkt for $\complement A$ jf. CB 2.1. Da vi lod a være givet, er alle punkter i $\complement A$ indre punkter for samme, og $\complement A$ er derfor åben jf. CB 2.4. Ved dualitet, CB 2.5, slutter vi, at A er afsluttet i M.

(b) $B = \{3,4,5,\ldots\}$

Lad $b \in B$ være givet. Da vi har, at

$$K(b,1) = \{x \in M \,|\, |x-b| < 1\} = \{x \in M \,|\, b-1 < x < b+1\} = \{b\} \subseteq B,$$

jf. CB 2.1, at b er indre punkt i B. Da vi lod b være givet, er B åben jf. CB 2.4.

Vi har, at $\complement B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup (1, 2]$. Lad $\beta \in \complement B$ være givet. Da vi har, at

$$K(\beta, 1) = \{x \in M \mid |x - \beta| < 1\} = \{x \in M \mid \beta - 1 < x < \beta + 1\} \subseteq \complement B,$$

er β indre punkt i $\complement B$ jf. CB 2.1. Da vi lod β være givet, er $\complement B$ åben jf. CB 2.4. Ved dualitet, CB 2.5, sluttes, at B er afsluttet i M.

(c+d) $C = (1, 2]$ og $D = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lad $c \in C$ være givet. Da er $c > 1$. Sæt $r = d(c, 1) = c - 1 > 0$. Da fås, at

$$\begin{aligned} K(c, r) &= \{x \in M \mid d(c, x) < r\} \\ &\overset{\clubsuit}{=} \{x \in M \mid 1 < x < 2c - 1\} \subseteq \{x \in M \mid 1 < x < 3\} = C, \end{aligned}$$

da $c \leq 2$, hvorpå $2c - 1 \leq 3$. Vi får jf. CB 2.1, at c er indre punkt i C. Da vi lod c være givet, er C åben i M jf. CB 2.4.

Lad nu $\delta \in D$ være givet. Da er $\delta < 1$. Sæt $r = d(1, \delta) = 1 - \delta > 0$. Da er

$$\begin{aligned} K(\delta, r) &= \{x \in M \mid d(\delta, x) < r\} \\ &\overset{\clubsuit}{=} \{x \in M \mid 2\delta - 1 < x < 1\} \subseteq \{x \in M \mid x < 1\} = D, \end{aligned}$$

hvorpå δ er indre punkt i D jf. CB 2.1 og D er åben i M jf. CB 2.4.

Da nu $\complement C = B \cup D$, og B og D er åbne, er $B \cup D$ også åben jf. CB 2.6(iii). Da er $\complement C$ også åben, og jf. dualitet CB 2.5 får vi, at C er afsluttet i M.

Da ligeledes $\complement D = B \cup C$, og B og C er åbne, er $B \cup C$ åben jf. CB 2.6(iii). Det følger dermed, at $\complement D$ er åben, og jf. CB 2.5 slutter vi, at D er afsluttet i M.

$\clubsuit$: Omskrivningen her kan måske virke forvirrende, men er blot direkte taget fra uligheden af form $d(a, x) = |x - a| < r$, hvor $r > 0$. Dette er ækvivalent med $a - r < x < a + r$. Da vi i alle tilfælde lader r afhænge af a, fås omskrivningerne naturligt ved indsættelse af $r = 2 - a$, $r = c - 1$ og $r = 1 - d$.

(e)

Der skal afgøres, om (M, d) er et fuldstændigt metrisk rum. Vi har først og fremmest jf. CB 5.2, at $(\mathbb{R}, d)$ er et fuldstændig metrisk rum, hvor d er den euklidiske metrik. Endvidere har vi, at $M \neq \emptyset$ er en delmængde af $\mathbb{R}$, idet alle $x \in M$ opfylder, at $x \in \mathbb{R}$.

Lad følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $\mathbb{R}$ være givet ved $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Denne følge vil konvergere imod 1 jf. TL 4.3.3, idet $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Betragt nu $M \subseteq \mathbb{R}$. Vi ser, at $x_n \in M$ (eller $D \subseteq M$) for alle $n \in \mathbb{N}$. Derfor må $1 \in \overline{M}$, jf. CB 2.10, da $\overline{M}$ består af de punkter $x \in \mathbb{R}$, der er grænsepunkter for en konvergent følge i $\mathbb{R}$, hvis punkter tilhører M.

Men da vi også har, at $1 \notin M$, får vi, at $M \neq \overline{M}$. Jf. CB 2.4 er M derpå ikke en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$. Der gælder jf. CB 5.3 derpå, at delrummet (M, d), som er et metrisk rum, *ikke* er fuldstændigt.

Opgave 2

(a)

Der skal vises, at
$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$
definerer en metrik på $\mathbb{R}$. Med (M1), (M2) og (M3) henvises til kravene for at d er en metrik, jf. CB 1.1.

Lad $x,y\in\mathbb{R}$ være givet. Da $|x-y|\geq 0$, er $1+|x-y|\geq 1>0$, hvorpå
$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\geq 0$$
for alle x,y. Vi har videre, at $d(x,y)\in\mathbb{R}$.

Lad endvidere $d(x,y)=0$. Dette medfører, at $|x-y|=0$ (da nævneren har ingen indflydelse på nulværdien), hvorpå $x-y=0$ og $x=y$. Har vi omvendt, at $x=y$, får vi, at
$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|x-x|}{1+|x-x|}=\frac{0}{1+0}=0.$$
Altså har vi, at $d(x,y)=0$ hvis og kun hvis $x=y$, og dermed er (M1) opfyldt.

Lad igen $x,y\in\mathbb{R}$ være givet. Da er $|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|$, og videre
$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|y-x|}{1+|y-x|}=d(y,x).$$
Dermed er (M2) opfyldt.

Betragt nu funktionen $\mathbb{R}_+\ni t\mapsto\frac{t}{t+1}$. Lad $t_1,t_2\in\mathbb{R}_+$ være givet, så $0<t_1\leq t_2$. Da følger, at $1<t_1+1\leq t_2+1$, og videre, at $1>\frac{1}{t_1+1}\geq\frac{1}{t_2+1}$. Vi får så, at $-1<-\frac{1}{t_1+1}\leq-\frac{1}{t_2+1}$, og endelig, at
$$0<\frac{t_1}{t_1+1}=1-\frac{1}{t_1+1}\leq 1-\frac{1}{t_2+1}=\frac{t_2}{t_2+1}$$
ved addition med 1. Altså medfører $0<t_1\leq t_2$, at $0<\frac{t_1}{t_1+1}\leq\frac{t_2}{t_2+1}$, og funktionen $\mathbb{R}_+\ni t\mapsto\frac{t}{t+1}\in\mathbb{R}_+$ er voksende.

Lad nu $x,y,z\in\mathbb{R}$ være givet. Ved trekantsuligheden TL 2.1.1 får vi, at $|x-y|\leq|x-z|+|z-y|$. Da vi fandt at ovenstående funktion var voksende, vil funktionsværdien for $|x-y|$, nemlig $d(x,y)$, være mindre end eller lig den for $|x-z|+|z-y|$. Vi har altså, at
$$\begin{aligned}
d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|} &\leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}\\
&= \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|}+\frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}\\
&\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|} \quad = \quad d(x,z)+d(z,y),
\end{aligned}$$

idet vi benyttede ved andet ulighedstegn, at $1+|a-c|+|c-b| \geq 1+|a-c|$, hvorpå $(1+|a-c|+|c-b|)^{-1} \leq (1+|a-c|)^{-1}$. Da er (M3) opfyldt, og dermed er d en metrik på $\mathbb{R}$ jf. CB 1.1.

(b)

Vi betragter nu mængden $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ af samtlige reelle følger $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, fremover betegnet (x_n). Der skal nu vises, at

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$$

definerer en metrik på $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Lad derfor $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ være givet. Lad endvidere $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da gælder, at $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, og at $1+|x_n - y_n| \geq 1$, hvorpå $-1 \leq -(1+|x_n-y_n|)^{-1} < 0$ og slutteligt, at

$$0 \leq 1 - \frac{1}{1+|x_n-y_n|} = \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} < 1.$$

Derfor vil gælde, da $2^{-n} > 0$, at

$$0 \leq 2^{-n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} < 2^{-n} \tag{1}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Da vi har, at $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ konvergerer jf. TL 12.1.9 og TL 12.1.1 med sum 1, vil den i opgaven givne række konvergere grundet ovenstående ulighed jf. TL 12.2.6, med sum i $\mathbb{R}$. Altså vil $d((x_n),(y_n)) \in \mathbb{R}$ (idet $d((x_n),(y_n)) < \infty$).

Vi betegner fremover metrikken fra delspørgsmål (a) med d_a. Da har vi, at $d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_a(x_n,y_n)$ for $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ – denne række konvergerer selvfølgelig stadigvæk.

Lad nu $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ være givet. Da (1) gjaldt for alle $n \in \mathbb{N}$, har vi, at $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_a(x_n,y_n)$ er en række med led større end eller lig 0, hvorpå summen dertil er større end eller lig 0. Derfor har vi, at $d((x_n),(y_n)) \geq 0$ for alle $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Lad endvidere $d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_a(x_n,y_n) = 0$. Da alle led er større end eller lig 0, kan dette kun gælde, hvis $2^{-n} d_a(x_n,y_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed $d_a(x_n,y_n) = 0$, da $2^{-n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi fik fra (M1) i delspørgsmål (a), at dette gjaldt, hvis og kun hvis $x_n = y_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Altså er $(x_n) = (y_n)$.

Lad til sidst $(x_n) = (y_n)$. Da er $x_n = y_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvorpå vi har fra (M1) i delspørgsmål (a), at $d_a(x_n,y_n) = 0$ og dermed $2^{-n} d_a(x_n,y_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_a(x_n,y_n)$ netop nulrækken med sum 0, og vi har altså $d((x_n),(y_n)) = 0$ hvis og kun hvis $(x_n) = (y_n)$. Dermed er (M1) opfyldt.

Vi har endvidere fra (M2) i (a), at

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_a(x_n,y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_a(y_n,x_n) = d((y_n),(x_n)).$$

Dermed er (M2) opfyldt.

Lad nu $(x_n),(y_n),(z_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ være givet. Da vil rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(x_n,y_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(x_n,z_n)$ og $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(z_n,y_n)$ konvergere jf. ovenstående.

Lad nu $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da vil $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$, og vi har endvidere ved (M3) fra delspørgsmål (a), at $d_a(x_n,y_n) \leq d_a(x_n,z_n) + d_a(z_n,y_n)$, dvs. $0 \leq [d_a(x_n,z_n) + d_a(z_n,y_n)] - d_a(x_n,y_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad $N \in \mathbb{N}$ være givet. Da har vi nu, idet $2^{-n} > 0$ og alle led i de nedenstående rækker er større end eller lig 0, at

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\left([d_a(x_n,z_n) + d_a(z_n,y_n)] - d_a(x_n,y_n)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left([d_a(x_n,z_n) + d_a(z_n,y_n)] - d_a(x_n,y_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(x_n,z_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(z_n,y_n) - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(x_n,y_n) \\
&= d((x_n),(z_n)) + d((z_n),(y_n)) - d((x_n),(y_n)),
\end{aligned}$$

jf. TL 12.1.7, da vi ved at ovenstående tre rækker er konvergente. Af ovenstående ulighed følger (M3), hvorpå d er en metrik i $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Endvidere skal $\operatorname{diam}\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \sup\{d((x_n),(y_n)) \mid (x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})\}$ bestemmes. Vi vil vise, at $\operatorname{diam}\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = 1$.

Lad derfor $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Da vi fandt, at

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_a(x_n,y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1,$$

er 1 dermed en majorant for $\{d((x_n),(y_n)) \mid (x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})\}$.

Lad nu $0 \leq \alpha < 1$ være givet. Vi vil vise, at der findes følger $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ så $d((x_n),(y_n)) > \alpha$. Lad (x_n) være den konstante følge givet ved $x_n = \frac{2}{1-\alpha} - 1$ og lad (y_n) være nulfølgen. Da er $|x_n - y_n| = \frac{2}{1-\alpha} - 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi får nu, at

$$\begin{aligned}
d((x_n),(y_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{\frac{2}{1-\alpha}-1}{\frac{2}{1-\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{\alpha+1}{2} \\
&= 2\cdot\frac{\alpha+1}{2} - \frac{\alpha+1}{2} = \frac{\alpha+1}{2} > \frac{\alpha+\alpha}{2} = \alpha,
\end{aligned}$$

jf. TL 12.1.1, idet $1 > \alpha$. Der findes altså følger $(x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ så $d((x_n),(y_n)) > \alpha$ for $0 \leq \alpha < 1$.

Dermed er 1 supremum for $\{d((x_n),(y_n)) \mid (x_n),(y_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})\}$, og $\operatorname{diam}\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = 1$.

Opgave 3

Vi betragter mængden $M = C([0,1],\mathbb{R})$ af kontinuerte reelle funktioner på $[0,1]$, og udstyrer dette med den uniforme metrik

$$d_M(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [0,1]\},$$

hvorpå (M, d) er et metrisk rum.

(a)

Det skal nu vises, at afbildningen $I : M \to \mathbb{R}$ givet ved

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

er kontinuert. Idet vi udstyrer $\mathbb{R}$ med den euklidiske metrik d, er I en afbildning mellem to metriske rum.

Lader vi en kontinuert reel funktion f defineret på $[0, 1]$ være givet (i M), kan billedet i I af f findes, i og med en kontinuert, reel funktion på $[0, 1]$ er integrabel på $[0, 1]$ jf. TL 8.3.3, hvorpå $I(f)$ eksisterer i $\mathbb{R}$. Jf. TL 5.3.2 vil gælde, at f er begrænset.

Lad $\varepsilon > 0$ og $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i M være givet. Sæt $\delta = \varepsilon$, og antag, at $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i M opfylder, at $d_M(f, g) < \delta$. Vi har, at

$$d(I(f), I(g)) = \left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \right|,$$

jf. TL 8.5.5, da f og g er integrable. Vi har derpå jf. Opgave B fra Ugeseddel 1, da f og g er begrænsede og integrable, at

$$d(I(f), I(g)) \leq \sup \{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\} (1 - 0) = d_M(f, g) < \delta = \varepsilon.$$

Dermed har vi jf. CB 3.1, at I er kontinuert i alle $f \in M$, idet der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $(\varepsilon =)$ $\delta > 0$, så der for alle $g \in M$, der opfylder, at $d_M(f, g) < \delta$, gælder, at $d(I(f), I(g)) < \varepsilon$. Derpå er I kontinuert jf. CB s. 30.

(b)

Vi betragter afslutningen af enhedskuglen $\overline{K(0, 1)} = \{f \in M \mid d_M(0, f) \leq 1\}$, hvor $0 \in M$ er nulfunktionen. Der skal vises, at I antager et maksimum og minimum på denne.

Lad $f \in \overline{K(0, 1)}$. Da har vi, at $|I(f)| \leq d_M(0, f) \leq 1$ jf. Opgave B fra ugeseddel 1, og dermed $-1 \leq I(f) \leq 1$ for alle $f \in \overline{K(0, 1)}$.

Lad $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f_1(x) = 1$. Denne funktion er kontinuert jf. TL s. 214 og reel og er derfor indeholdt i M. Da $d_M(0, f_1) = \sup \{|f_1(x)| \mid x \in [0, 1]\} = 1 \leq 1$, har vi, at $f_1 \in \overline{K(0, 1)}$.

Da $I(f_1) = \int_0^1 1dx = 1$, har vi nu for alle $f \in \overline{K(0, 1)}$, at $I(f) \leq 1 = I(f_1)$. Da $I(f_1) \in I(\overline{K(0, 1)})$ og $I(f) \leq I(f_1)$ for alle $f \in \overline{K(0, 1)}$, er $I(f_1)$ maksimum for billedmængden $I(\overline{K(0, 1)})$, hvorpå I antager et maksimum på $\overline{K(0, 1)}$.

Lad $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f_2(x) = -1$. Denne funktion er kontinuert jf. TL s. 214 og reel, hvorpå $f_2 \in M$. Da $d_M(0, f_2) = \sup \{|f_2(x)| \mid x \in [0, 1]\} = 1 \leq 1$, har vi, at $f_2 \in \overline{K(0, 1)}$.

Da $I(f_2) = \int_0^1 -1dx = -1$, har vi for alle $f \in \overline{K(0, 1)}$, at $I(f_2) = 1 \leq I(f)$. Da $I(f_2) \in I(\overline{K(0, 1)})$ og $I(f_2) \leq I(f)$ for alle $f \in \overline{K(0, 1)}$, er $I(f_2)$ minimum for $I(\overline{K(0, 1)})$, hvorpå I antager et minimum på $\overline{K(0, 1)}$.

(c)

Betragt nu f_n givet ved $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ for $n \in \mathbb{N}$. f_n er kontinuert for alle $n \in \mathbb{N}$ jf. TL s. 214, dvs. $f_n \in M$. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da har vi, at $d_M(0, f_n) = \sup\{|x^n| \,|\, x \in [0,1]\} = 1 \leq 1$, i og med f_n er voksende (da $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1^n \leq x_2^n$ for $n \in \mathbb{N}$ og $x_1, x_2 \in [0,1]$).

Altså har vi, at $f_n \in \overline{K(0,1)}$ for alle $n \in \mathbb{N}$; vi har derpå en uendelig følge af funktioner, og f_n definerer hermed en punktfølge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\overline{K(0,1)}$.

Vi vil vise, at der ikke findes nogen konvergent delfølge af følgen (f_n), for dermed at konkludere, at $\overline{K(0,1)}$ ikke er kompakt.

Da vi har, at $f_n \in \overline{K(0,1)} \subseteq M \subseteq \mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$, da enhver kontinuert funktion er begrænset jf. TL 5.3.2, kan vi undersøge om (f_n) konvergerer i $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$. Lad $x = 1$. Da $f_n(x) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, vil den derpå konstante talfølge $(f_n(x))$ konvergere mod 1. Lad nu $x \in [0,1)$. Da vil $f_n(x) = x^n \to 0$ for $n \to \infty$. Talfølgen $(f_n(x))$ vil derpå konvergere mod 0. Lad nu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \in [0,1) \\ 1, & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

Da har vi jf. TL 11.3.1, at (f_n) konvergerer punktvis mod f på $[0,1]$.

Lad nu en vilkårlig delfølge (f_{n_p}) af (f_n), hvor (n_p) er en voksende følge i $\mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ og $x \in [0,1]$ være givet. Da vi fandt, at (f_n) konvergerede punktvis mod f på $[0,1]$, kan vi finde et $N \in \mathbb{N}$, så der for alle $x \in [0,1]$ fås, at $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ når $n \geq N$. Men for $p \geq N$ er $n_p \geq p \geq N$, da (n_p) er en voksende følge i $\mathbb{N}$, så $|f_{n_p}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Dermed konvergerer enhver delfølge af (f_n) punktvis mod f på $[0,1]$ jf. TL 11.3.1.

Vi kigger igen på den vilkårlige delfølge (f_{n_p}). Da $n_p \in \mathbb{N}$, er f_{n_p} (givet ved $f_{n_p}(x) = x^{n_p}$) ligeledes kontinuert jf. TL s. 214 for alle $p \in \mathbb{N}$. Da f ikke er kontinuert, men da f_{n_p} er for alle $p \in \mathbb{N}$, får vi ved kontraposition af TL 11.3.8, at delfølgen (f_{n_p}) ikke konvergerer uniformt mod f på $[0,1]$ – dermed konvergerer (f_{n_p}) ikke uniformt mod nogen funktion på $[0,1]$, da f var den dertil eneste mulighed jf. den punktvise konvergens.

Vi har altså, at enhver delfølge (f_{n_p}) af (f_n) ikke konvergerer uniformt (mod f) på $[0,1]$. Jf. CB 1.11 ses, at (f_{n_p}) ikke konvergerer i $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ og dermed ikke i delrummet M. Altså har vi, at (f_n), en punktfølge i $\overline{K(0,1)}$, ikke har en konvergent delfølge i M og dermed heller ikke i $\overline{K(0,1)} \subseteq M$. Jf. CB 6.3 har (f_n) intet fortætningspunkt i $\overline{K(0,1)}$ og jf. CB 6.7 er $\overline{K(0,1)}$ ikke kompakt.