An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

18. november 2009

Problem 1.8

For en funktion f, der antager værdier i $\mathbb{C}$ og er kontinuert differentiabel på $[-\pi,\pi]$, gælder, at

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Bevis. Antag, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er kontinuert differentiabel på $[-\pi,\pi]$.

Det blev vist i Problem 1.2, at funktionsrummet $W[a,b]$, hvor $a < b$ i $\mathbb{R}$, af kontinuert differentiable funktioner på $[a,b]$ med værdier i $\mathbb{C}$ er et indre produktrum – mht. punktvis addition og skalarmultiplikation – med indre produkt

$$(g,h)_W = \int_a^b g(t)\overline{h(t)} + g'(t)\overline{h'(t)}\mathrm{d}t, \quad g,h \in W[a,b].$$

Betragter vi nu det indre produkt-rum $W[-\pi,\pi]$, har vi klart pr. antagelse, at $f \in W[-\pi,\pi]$. Tillige ved vi, at funktionen cos også er differentiabel på $[-\pi,\pi]$ med kontinuert differentialkvotient $\cos' = -\sin$. Altså er $\cos \in W[-\pi,\pi]$, og vi kan derfor regne med indre produkter i $W[-\pi,\pi]$ med f og cos.

Vi har nu, at

$$(f,f)_W = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)} + f'(t)\overline{f'(t)}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\mathrm{d}t,$$

og da cos og $-\sin$ kun antager værdier i $\mathbb{R}$, har vi yderligere, at

$$\begin{aligned}(\cos,\cos)_W &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(t) + (-\sin(t))(-\sin(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = \pi - (-\pi) = 2\pi.\end{aligned}$$

Da $(f,\cos)_W = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t)\mathrm{d}t$, fås ved Cauchy-Schwarzs ulighed (Sætning 1.9), at

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t)\mathrm{d}t\right| &= |(f,\cos)_W| \overset{1.9}{\leq} (\cos,\cos)_W^{1/2}(f,f)_W^{1/2} \\ &= \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},\end{aligned}$$

hvilket netop var det ønskede. □