An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

25. november 2009

Problem 2.11

I $W[0,1]$ *er det indre produkt* $(f, \cosh)_W = f(1)\sinh(1)$ *for alle* $f \in W[0,1]$*, og*

$$A = \{f \in W[0,1] | f(1) = 0\}$$

er et afsluttet underrum i $W[0,1]$*.*

Bevis. Lad $f \in W[0,1]$ (pr. Problem 1.2). Da $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel med kontinuert differentialkvotient sinh (dette indses let, da både cosh og sinh er summer af eksponentialfunktioner ganget med konstanter i $\mathbb{R}$), er $\cosh \in W[0,1]$.

Benytter vi det indre produkt i $W[0,1]$ fundet i Problem 1.2, fås, idet cosh og sinh kun antager værdier i $\mathbb{R}$, at

$$\begin{aligned}
(f, \cosh)_W &= \int_0^1 f(t)\cosh(t) + f'(t)\sinh(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\sinh'(t) + f'(t)\sinh(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t)\sinh(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= [f(t)\sinh(t)]_0^1 = f(1)\sinh(1) - f(0)\sinh(0) = f(1)\sinh(1),
\end{aligned}$$

hvor vi benyttede, at $\sinh' = \cosh$, og at $\sinh(0) = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0$.

Vi viser nu, at A er et underrum i $W[0,1]$. Vi har først og fremmest, da nulfunktionen, som er kontinuert differentiabel, klart ligger i A, at $A \neq \emptyset$.

Lad nu $f, g \in A$ og $\lambda \in \mathbb{C}$. Da $W[0,1]$ jf. Problem 1.2 er et vektorrum med punktvis addition og skalarmultiplikation, har vi, at

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0,$$

og

$$(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

hvorpå $f + g \in A$ og $\lambda f \in A$. Da er A et underrum i $W[0,1]$.

For at vise, at A er afsluttet i $W[0,1]$, skal vi vise, at enhver punktfølge med elementer i A, der er konvergent i $W[0,1]$, har grænsepunkt i A. Lad funktionsfølgen (f_n) være en sådan punktfølge i A (altså $f_n(1) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$), så $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $W[0,1]$. Vi skal vise, at $f \in A$, altså, at $f(1) = 0$.

Vi finder med det foregående og antagelsen, at $f(1)\sinh(1) = (f, \cosh)_W$.

Da vi pr. antagelse har for følgerne $(f_n), (\cosh) \in W[0,1]$, at $f_n \to f$ og $\cosh \to \cosh$ i $W[0,1]$ (thi de konstante følger i $W[0,1]$ konvergerer imod sin egen konstant), fås altså i $W[0,1] \times W[0,1]$, at $(f_n, \cosh) \to (f, \cosh)$ jf. CB 4.3(d) for $n \to \infty$.

Det indre produkt på $W[0,1]$ er en kontinuert afbildning fra $W[0,1] \times W[0,1]$ ind i $\mathbb{C}$ jf. NY 2.6. Da fås ved CB 3.1, at $(f_n, \cosh)_W \to (f, \cosh)_W$ i $\mathbb{C}$ for $n \to \infty$, dvs.

$$f(1)\sinh(1) = (f, \cosh)_W = \lim_{n\to\infty} (f_n, \cosh)_W = \lim_{n\to\infty} f_n(1)\sinh(1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

thi $f_n(1) = 0$, da f_n var antaget liggende i A. Altså er $f(1) = 0$, thi nulreglen gælder i $\mathbb{C}$ og $\sinh(1) \neq 0$, hvorpå $f \in A$. $\square$