An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

2. december 2009, rettet 29. marts 2012

Problem 3.2

Det komplekse vektorrum $C[0,1]$ er ikke et Hilbert-rum med det indre produkt

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

for $f,g \in C[0,1]$.

Bevis. Vi viser, at $C[0,1]$ ikke er et fuldstændigt metrisk rum med metrikken induceret ved normen givet ud fra det indre produkt (dvs. for $u,v \in C[0,1]$, at $\|u-v\| = (u-v,u-v)^{1/2}$). Vi betragter følgen (f_n) af kontinuerte funktioner $[0,1] \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ nx - n/2 + 1 & \text{for } x \in (1/2 - 1/n, 1/2) \\ 1 & \text{for } x \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

denne følge er en Cauchy-følge i $C[0,1]$, thi lader vi $\varepsilon > 0$ være givet, kan vi lade N være det mindste naturlige tal skarpt større end $2/\varepsilon^2$, hvorpå vi har for $k,l \in \mathbb{N}$ og $k > l \geq N$, at $f_k, f_l \in C[0,1]$ og

$$\begin{aligned}
0 \leq \|f_k - f_l\|^2 &= \int_0^1 |f_k(t) - f_l(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left(|f_k(t)|^2 + |f_l(t)|^2 - 2f_k(t)f_l(t)\right) \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f_k(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_k(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} |f_l(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_l(t)|^2 \mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 2f_k(t)f_l(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{2}} (kt - \tfrac{k}{2} + 1)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{2}} (lt - \tfrac{l}{2} + 1)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2} - 1 \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{k} y^2 \mathrm{d}y + \int_0^1 \tfrac{1}{l} y^2 \mathrm{d}y = \tfrac{1}{3k} + \tfrac{1}{3l} < \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{l} \leq \tfrac{2}{N} < \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

hvor vi benytter (i) substitutionen $y = nt + \frac{n}{2} - 1$ for $n \in \mathbb{N}$; (ii) at alle f_m, hvor $m \in \mathbb{N}$ er positive; og (iii) for integralerne over $x \in [1/2, 1]$, at $f_k(x) = f_l(x) = 1$, og at $f_n = 0$ for $x \in [0, 1/2 - 1/n]$ og $n \in \mathbb{N}$.

Altså vil $\|f_k - f_l\| < \varepsilon$ for $k, l \geq N$, og følgen er Cauchy i $C[0,1]$.

Følgen er ikke konvergent mod en funktion i $C[0,1]$. Antag, at den er konvergent mod en funktion $f \in C[0,1]$. Da vil

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x = \|f_n - f\|^2 \to 0$$

for $n \to \infty$.Vi har i $\mathbb{R}$ for et givet $n \in \mathbb{N}$, da $f_n, f \in C[0,1]$, at

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|^2 &= \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(x)|^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Vi har nu for $n \to \infty$, at

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \to \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \to 0,$$

pr. Lebesgues monotonisætning. Vi får altså for $n \to \infty$, at

$$\|f_n - f\|^2 \to \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

da vi også havde, at $\|f_n - f\|^2 \to 0$.

Da integranderne er ikke-negative, må gælde, at hver af integralernes værdier er større end eller lig 0. Eneste mulighed er derfor (grundet konvergensen), at begge er lig 0. Da integranderne er kontinuerte og ikke-negative, følger nu i hvert fald, at integranderne er lig 0 på visse delmængder af de til integralerne hørende intervaller; nærmere sagt, at $|f(x)|^2 = 0$ for alle $x \in (0, \frac{1}{2})$, og at $|1 - f(x)|^2 = 0$ for alle $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, eller at $f(x) = 0$ for $x \in (0, \frac{1}{2})$ og $f(x) = 1$ for $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Grunden til at vi ikke medtager endepunkterne i intervallerne, er tildels at det ville stride imod, at f var veldefineret, og desuden kan vi ikke garantere noget om f's funktionsværdier i endepunkterne, da integralet kan opfattes som værende over alle fire former for intervaller; på denne måde er vi helt sikre på hvad f er visse steder.

Imidlertid er det klart, at $f(x) \to 1$ for $x \to \frac{1}{2}_+$ og at $f(x) \to 0$ for $x \to \frac{1}{2}_-$, og dette strider imod kontinuitet af f. Altså konvergerer (f_n) ikke mod en funktion i $C[0,1]$ i metrikken induceret af det indre produkt, og vi konkluderer, at $C[0,1]$ *ikke er et Hilbert-rum.* $\square$