An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

16. december 2009

For alle $n \in \mathbb{Z}$ og $f \in L_2(-\pi, \pi)$ er Fourier-koefficienten $c_n(f)$ givet ved

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t.$$

Exercise 6new

Sætning. *Antag for en funktion $f \in C^1[-\pi, \pi]$, at $f(\pi) = f(-\pi)$. Da gælder relationen $c_n(f') = inc_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ for Fourier-koefficienterne for f og f'.*

Bevis. Lad f opfylde det ovenstående. Da f og f' er kontinuerte på $[-\pi, \pi]$, gælder, at $f, f' \in L^2(-\pi, \pi)$, hvormed vi kan opskrive Fourier-koefficienter c_n for disse. Vi får nu med partiel integration for $n \in \mathbb{Z}$, at

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} c_n(f') &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} \mathrm{d}t = \left[f(t) e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t \\ &= f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi} + in\sqrt{2\pi} c_n(f) = in\sqrt{2\pi} c_n(f), \end{aligned}$$

thi $f(\pi)e^{-in\pi} = f(-\pi)(-1)^n = f(-\pi)e^{in\pi}$; dermed det ønskede. □

Vi ønsker at bruge dette til at finde Fourier-rækkerne for funktionerne $f_3(x) = x^3$ og $f_4(x) = x^4$, idet vi kender Fourier-rækkerne for funktionerne $f_1(x) = x$ og $f_2(x) = x^2$:

$$f_1 \sim \sum_{n \neq 0} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad \text{og} \quad f_2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}.$$

Der gælder for alle $f \in L^2(-\pi, \pi)$, at afbildningen $f \mapsto c_n(f)$ er lineær – dette følger let af sætninger for integraler.

Betragt funktionen $g_3(x) = x^3 - \pi^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Både denne og dens afledte $g_3'(x) = 3x^2 - \pi$ er kontinuert differentiable på $[-\pi, \pi]$, med $g_3''(x) = 6x = 6f_1(x)$. Det ses også, at $g_3 = f_3 - \pi^2 f_1$.

Da $g_3(\pi) - g_3(-\pi) = \pi^3 - \pi^3 - (-\pi^3) + (-\pi^3) = 0$, og da g_3' er lige, har vi pr. ovenstående sætning for $n \neq 0$, at

$$c_n(g_3) = -\frac{i}{n} c_n(g_3') = -\frac{1}{n^2} c_n(g_3'') = -\frac{1}{n^2} c_n(6f_1) = -\frac{6}{n^2} c_n(f_1),$$

men da $g_3 = f_3 - \pi^2 f_1$, må gælde, at $c_n(f_3) = c_n(g_3) + \pi^2 c_n(f_1) = (\pi^2 - \frac{6}{n^2})c_n(f_1)$ grundet linearitet. Altså er

$$c_n(f_3) = \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right) i\frac{(-1)^n}{n} = i\frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^2}\frac{(-1)^n}{n} = \frac{i(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^3}$$

for $n \neq 0$. Da $g_4(x) = \frac{1}{4}x^4$ er C^1 på $[-\pi, \pi]$ og lige (så $g_4(\pi) = g_4(-\pi)$) og $g_4' = f_3$, gælder også ifølge ovenstående sætning, at $c_0(f_3) = 0 \cdot ic_n(g_4) = 0$.

Da f_4 er C^1 på $[-\pi, \pi]$ og $g_4(\pi) = g_4(-\pi)$, og da $f_4' = 4f_3$, gælder for $n \neq 0$, at

$$c_n(f_4) = -\frac{i}{n}c_n(4f_3) = -\frac{4i}{n}c_n(f_3) = \frac{4(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4},$$

og at

$$c_0(f_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 e^0 \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi^4\sqrt{\pi}}{5}.$$

Dermed har vi fundet Fourier-rækkerne for f_3 og f_4:

$$\begin{aligned} f_3 &\sim \sum_{n\neq 0} \frac{i(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^3} e^{inx}, \quad \text{og} \\ f_4 &\sim \frac{\sqrt{2}\pi^4\sqrt{\pi}}{5} + \sum_{n\neq 0} \frac{4(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} e^{inx}. \end{aligned}$$