An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

13. januar 2009

Problem 6.2

Vi definerer *n'te-koefficient-funktionalet* på rummet $\mathscr{P}$ af polynomier med koefficienter i $\mathbb{C}$ på $[0,1]$ til at være funktionalet C_n givet ved $C_n(p) = a_n$, hvor $p(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j$, $t \in [0,1]$. Det er underforstået, at $C_n(p) = 0$, hvis $m < n$.

Lader vi fx $f_1(x) = x^4 + 2x^3 + 8x$, er $C_3(f_1) = 2$ og $C_5(f_1) = 0$.

C_n er klart lineær. Den n'te koefficient for polynomiet $\mu p + \lambda q$ er selvfølgelig $\mu C_n(p) + \lambda C_n(q)$.

For $n = 0$ vil $C_n(f) = f(0)$ for alle $f \in \mathscr{P}$. Da

$$|C_0(f) - C_0(g)| = |f(0) - g(0)| = |(f-g)(0)| \leq \|f - g\|_\infty$$

for $f, g \in \mathscr{P}$, er C_0 kontinuert med hensyn til $\|\cdot\|_\infty$. For $n \in \mathbb{N}$ vil gælde noget andet:

C_n er diskontinuert med hensyn til $\|\cdot\|_\infty$ for $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet, og lad $k > n$, $k \in \mathbb{N}$. Lad nu $p_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ være givet ved $p_k(t) = {}^{(1-t)^k}/\binom{k}{n}$; for alle $k \in \mathbb{N}$ er $p_k \in \mathscr{P}$. Nu vil

$$\|p_k\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{(1-t)^k}{\binom{k}{n}} \right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\binom{k}{n}} = \frac{1}{\binom{k}{n}} \to 0,$$

når vi lader $k \to \infty$. Lader vi $p = 0$, ses at $p \in \mathscr{P}$, og med ovenstående vil gælde, at $p_k \to p$ i $\mathscr{P}$ med den uniforme norm. Vi har nu, at p_k ved binomialformlen kan opskrives

$$p_k(t) = \frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(-t)^j 1^{k-j}}{\binom{k}{n}} = \sum_{j=0}^k \frac{\binom{k}{j}(-1)^j}{\binom{k}{n}} t^j,$$

hvormed

$$C_n(p_k) = \frac{\binom{k}{n}(-1)^n}{\binom{k}{n}} = (-1)^n.$$

Hvis C_n er kontinuert, er C_n også følgekontinuert; dvs. hvis en funktionsfølge i $\mathscr{P}$, (f_k), konvergerer imod en funktion $f \in \mathscr{P}$ for $k \to \infty$, vil gælde, at $C_n(f_k) \to C_n(f)$ for $k \to \infty$ i $\mathbb{C}$. Imidlertid har vi blot for $k \to \infty$, at

$$C_n(p_k) = (-1)^n \to (-1)^n \neq 0 = C_n(p).$$

Altså er C_n ikke følgekontinuert, og dermed ikke kontinuert. $\square$