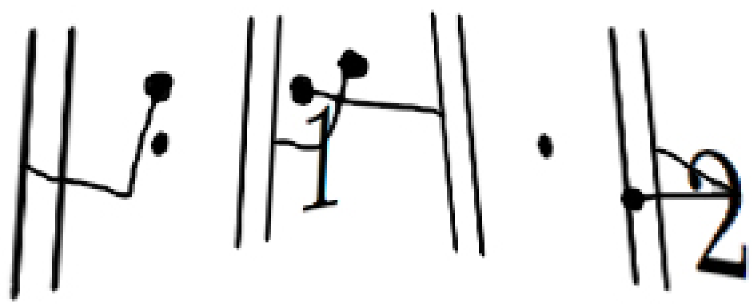
Analyse 2

Rasmus Sylvester Bryder, Katrine Frovin Gravesen,
Søren Frejstrup Grav Petersen og Anders Wolfsberg

2010



INDHOLD

NY henviser til Nicholas Young: “An Introduction to Hilbert Space”. CB henviser til Christian Berg: “Metriske rum”.

Man bør have haft VtMat med Rasmus og Søren for at forstå forsideillustrationen.

KAPITEL 1

FULDSTÆNDIGE OG KOMPAKTE METRISKE RUM

Kompakt delmængde af et metrisk rum.

Lader vi (M, d) være et metrisk rum og (x_n) en punktfølge i (M, d), er a *fortætningspunkt* for (x_n), hvis $\sharp\{n \in \mathbb{N} \mid d(a, x_n) < r\} = \infty$ for alle $r > 0$.

Lad (M, d) være et metrisk rum og K en delmængde af (M, d). K kaldes *kompakt*, hvis enhver punktfølge i K har et fortætningspunkt i K. Det blev vist i Analyse 1, at denne betingelse var ækvivalent med betingelsen, at enhver punktfølge i K har en konvergent delfølge med grænsepunkt i K.

Man siger, at *et metrisk rum er kompakt*, hvis det er kompakt som delmængde af sig selv.

Alle kompakte mængder i et metrisk rum er afsluttede. Et bevis for dette følger indirekte. Lad nemlig $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være kompakt. Antag, at A ikke er afsluttet. Da er $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$, så vi kan finde $x \in \overline{A} \setminus A$. Der findes endvidere en punktfølge (x_n) i A med $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, da $x \in \overline{A}$. Da vi antog, at A var kompakt, har (x_n) et fortætningspunkt $x' \in A$, og det følger af CB 6.3, at der findes en konvergent delfølge (x_{n_p}) af (x_n), så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x'$. Da delfølgen nødvendigvis må konvergere mod samme punkt som følgen, må $x = x'$, og dermed $x \in A$, hvorpå vi opnår en modstrid.

Omvendt giver Heine-Borels sætning, at alle afsluttede og begrænsede delmængder af $\mathbb{R}^k$ er kompakte delmængder i det metriske rum $(\mathbb{R}^k, d)$, hvor d er den sædvanlige metrik. Fx er $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt i $(\mathbb{R}, d)$.

Fuldstændigt metrisk rum.

Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad (x_n) være en punktfølge i (M, d). (x_n) kaldes en *Cauchy-følge*, hvis der for alle $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, således at hvis $m, n \in \mathbb{N}$ og $m, n \geq N$, da er $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Det følger let af definitionen, at alle konvergente følger i et metrisk rum er Cauchy-følger. Et metrisk rum (M, d) kaldes *fuldstændigt*, hvis enhver Cauchy-følge i (M, d) er konvergent.

I $\mathbb{R}$ er Cauchy-følger konvergente, og således er $(\mathbb{R}, d)$ et fuldstændigt metrisk rum med den sædvanlige metrik. Det samme kan vises for $\mathbb{R}^k$, såfremt vi lader en Cauchy-følge (x_n), hvor $x_n = (x_{n1}, \dots, x_{nk})$, $n \in \mathbb{N}$, i $\mathbb{R}^k$ være givet. Da

$$|x_{nj} - x_{mj}| = \sqrt{|x_{nj} - x_{mj}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_{ni} - x_{mi}|^2} = \|x_n - x_m\|_2$$

for alle $j = 1, \dots, k$, ses, at hver koordinatfølge i (x_n), altså (x_{nj}), $j = 1, \dots, k$, er en Cauchy-følge, og da koordinatfølgerne er følger i $\mathbb{R}$, er de konvergente. Derpå ses, at $\lim_{n\to\infty} x_n = (\lim_{n\to\infty} x_{n1}, \dots, \lim_{n\to\infty} x_{nk})$, hvorpå (x_n) er konvergent.

Det kan indses ved et isometrisk argument, at $(\mathbb{C}^k, d)$ er et fuldstændigt metrisk rum med den sædvanlige metrik. $(\mathbb{Q}, d)$ er **ikke** et fuldstændigt metrisk rum med den sædvanlige metrik jf. CB 5.3, idet $\mathbb{Q}$ ikke er en afsluttet delmængde i $\mathbb{R}$ (tag eksempelvis følgen $(\sum_{i=1}^{n} i^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$, som i $\mathbb{R}$ konvergerer imod $\pi^2/6 \notin \mathbb{Q}$, hvorpå $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$).

Fælles- og foreningsmængder.

Vi har i et metrisk rum (M, d), at

(i) enhver endelig forening af kompakte mængder er kompakt, og

(ii) ethvert snit af kompakte mængder er kompakt.

Bevis. (i). Lad $A = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ være en endelig forening af kompakte mængder. Lad (x_n) være en følge i A. Da der er uendelig mange elementer i følgen, må der gælde for mindst ét $k \in \{1, \dots, n\}$, at $\sharp\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in F_k\} = \infty$ (gjaldt der ikke dette, ville $\sharp\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in A\} \leq \sum_{i=1}^{n} \sharp\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in F_i\} < \infty$, hvilket er i modstrid med, at der er uendelig mange elementer i følgen). Lad $k \in \{1, \dots, n\}$ opfylde dette. Betragt nu delfølgen (x_{n_p}), hvor x_{n_p} er det p'te element i F_k fra (x_n). Denne er en følge i F_k, som jo var kompakt, og derfor har (x_{n_p}) en konvergent delfølge $(x_{n_{p_s}})$ i F_k. Men da $(x_{n_{p_s}})$ også er en delfølge af (x_n) i A, har (x_n) en konvergent delfølge i A. Da er A kompakt.

Det uendelige tilfælde gælder ikke generelt: tag fx de kompakte mængder $G_i = [-i, i]$ i $(\mathbb{R}, d)$; da er $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \mathbb{R}$ tydeligvis *ikke* kompakt i $(\mathbb{R}, d)$.

(ii). Lad $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ være snittet af de kompakte mængder i familien $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da B er afsluttet – da F_n er kompakt og afsluttet for alle $n \in \mathbb{N}$ (pr. CB 2.7) – og $B \subseteq F_1$, som er kompakt, må B selv være kompakt. □

Desværre.

En *homeomorfi* f er en bijektiv afbildning mellem to metriske rum, hvorom der gælder, at f og f^{-1} er kontinuerte. Begrebet er meget vigtigt inden for topologi. Der gælder **ikke**, at hvis $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ er en homeomorfi og (M, d_M) er et fuldstændigt metrisk rum, at (N, d_N) også er et fuldstændigt metrisk rum. Lad nemlig (M, d_M) være det fuldstændigt metriske rum $(\mathbb{R}, d)$, hvor d er den sædvanlige metrik, og lad $(N, d_N) = ((-1, 1), d)$, som ikke er et fuldstændigt metrisk rum, thi $(-1, 1)$ ikke er afsluttet i det fuldstændigt metriske rum $(\mathbb{R}, d)$; lad til sidst $f : (\mathbb{R}, d) \to ((-1, 1), d)$ være givet ved $f(x) = 2/\pi \arctan(x)$. Det er let at se, at denne er en homeomorfi.

Et kompakt metrisk rum er fuldstændigt.

Lad nemlig (M, d) være et kompakt metrisk rum. Vi skal vise, at enhver Cauchy-følge i M konvergerer, så lad (x_n) være en Cauchy-følge og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da (M, d) er kompakt, må (x_n) have en konvergent delfølge (x_{n_p}), der konvergerer imod $a \in M$. Dvs. der findes $N \in \mathbb{N}$, så $d(x_{n_p}, a) < \varepsilon/2$ for $p \geq N$, og der findes $Q \in \mathbb{N}$, så $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ for $n, m \geq Q$. Sætter vi nu $R = \max\{N, Q\}$, får vi for $n \geq R$, da $n_R \geq R \geq N$, at

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_R}) + d(x_{n_R}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Det gælder dog ikke i almindelighed, at fuldstændige metriske rum er kompakte. Tag for eksempel $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik d – vi ved, at det er fuldstændigt fra før, men da $\operatorname{diam}\mathbb{R} = \sup\{d(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \infty$, er $\mathbb{R}$ ikke begrænset som delmængde af sig selv, og dermed ikke kompakt.

Kompakthed som begrænsningsegenskab.

En endelig delmængde af et metrisk rum er kompakt. Lad nemlig (M, d) være et metrisk rum, og lad K være en endelig delmængde af M. K kan skrives som en endelig forening af etpunktsmængder, som er kompakte. Men så er K kompakt pr. foregående sætning.

Der gælder ydermere, at *en kompakt delmængde af et metrisk rum er begrænset.* Beviset er som følger: Antag, at den kompakte delmængde A af et metrisk rum (M, d) ikke er begrænset. Da kan vi vælge $y_1 \in A$, og da A er ubegrænset, kan vi vælge $y_2 \in A \setminus B(y_1, 1)$, idet $B(a, r)$ angiver kuglen med centrum a og radius r. Da $B(y_1, 1) \cup B(y_2, 1)$ er begrænset, kan denne mængde ikke indeholde den ubegrænsede mængde A, så vi vælger $y_3 \in A \setminus (B(y_1, 1) \cup B(y_2, 1))$. Vi får rekursivt en følge (y_n) i A med egenskaben $y_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, 1)$ for $n \in \mathbb{N}$. Dvs. at $d(y_n, y_m) \geq 1$ for alle $n \neq m$, men denne følge kan ikke have et fortætningspunkt, hvorpå vi opnår en modstrid.

En kontinuert funktion $f : K \to Y$ på en kompakt delmængde K af et metrisk rum (X, d_X) er begrænset i (Y, d_Y).

Vi viser dette direkte ved at vise, at enhver punktfølge i $f(K)$ har en konvergent delfølge. Lad da (y_n) være en punktfølge med punkter i $f(K)$. Da $y_n \in f(K)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, kan vi for alle $n \in \mathbb{N}$ finde $x_n \in K$, så $f(x_n) = y_n$. Vi får deraf en følge (x_n) med punkter i K. Da K er kompakt, findes nu $x \in K$ og en delfølge (x_{n_p}) af (x_n), så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$. Da f var antaget kontinuert på K, gælder nu, at $f(x) = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = \lim_{p\to\infty} y_{n_p}$. Da konvergerer (y_{n_p}) mod $f(x) \in f(K)$, så (y_n) har altså en konvergent delfølge med grænsepunkt i $f(K)$. Altså er $f(K)$ en kompakt delmængde af (Y, d_Y), og dermed begrænset ved ovenstående.

Vi får af ovenstående sætning *ekstremalværdisætningen*: *En kontinuert reel funktion på et begrænset, afsluttet interval i $\mathbb{R}$ er begrænset og har både mindsteværdi og størsteværdi.* Begrænsede, afsluttede intervaller i $\mathbb{R}$ er netop kompakte delmængder af $(\mathbb{R}, d)$, hvor d er den sædvanlige metrik, og idet vi lader sekundærrummet være $(\mathbb{R}, d)$ ligeså, har vi, at billedmængden for funktionen er kompakt i $(\mathbb{R}, d)$ og dermed afsluttet og begrænset, hvorpå den har mindste- og størsteværdi som følge af afslutningen i $\mathbb{R}$.

$(\mathcal{B}(M), \|\cdot\|_\infty)$ er et fuldstændigt metrisk rum med metrikken givet ved den uniforme norm.

Lad M være en mængde og definer for funktionen $f : M \to \mathbb{C}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{m \in M} |f(m)|.$$

$\mathcal{B}(M)$ er mængden af funktioner $f : M \to \mathbb{C}$, for hvilke $\|f\|_\infty < \infty$.

> **Trin 1: Find grænsekandidat for Cauchy-følge.** Lad (f^k) være en Cauchy-følge af funktioner i $\mathcal{B}(M)$. Da fås følgende: For ethvert $\varepsilon > 0$ findes et K, så $k, l \geq K$ medfører $\|f^k - f^l\|_\infty < \varepsilon$. **For alle** $x \in M$ og $k, l \geq K$ gælder, at $|f^k(x) - f^l(x)| \leq \sup_{x \in M} |f^k(x) - f^l(x)| = \|f^k - f^l\|_\infty < \varepsilon$. Dette viser, at $(f^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge for hvert $x_0 \in M$ i $\mathbb{C}$, som jo er et fuldstændigt metrisk rum, hvorfor $(f^k(x_0))$ konvergerer mod et $y \in \mathbb{C}$; kald $f(x_0) = y$. $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergerer altså punktvist mod en funktion f.
>
> **Trin 2: $f \in \mathcal{B}(M)$.** Da $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge, findes $K \in \mathbb{N}$, så $k, l \geq K$ medfører $|f^k(x) - f^l(x)| < 1$ for alle $x \in M$ (og dermed også for $l = K$). Da $f^K \in \mathcal{B}(M)$, findes $N \in \mathbb{R}$, så $|f^K(x)| \leq N$ for alle $x \in M$. For alle $x \in M$ fås nu, at $|f^k(x)| \leq |f^k(x) - f^K(x)| + |f^K(x)| < 1 + N$. Det følger, idet $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ er kontinuert, at $|f(x)| = \lim_{k \to \infty} |f^k(x)| \leq 1 + N$ for alle $x \in M$; dvs. $\sup_{x \in M} |f(x)| \leq 1 + N < \infty$. Da er $f \in \mathcal{B}(M)$.
>
> **Trin 3: $f^k \to f$.** Givet $\varepsilon > 0$ findes $K \in \mathbb{N}$, så $k, l \geq K$ medfører $|f^k(x) - f^l(x)| \leq \|f^k - f^l\|_\infty < \varepsilon/2$ for alle $x \in M$, da (f^k) var Cauchy. Det følger for alle $x \in M$, at $|\lim_{l \to \infty}(f^k(x) - f^l(x))| = |f^k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$, når blot $k \geq K$, idet $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Det vil altså sige, at $\|f^k - f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f^k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ for $k \geq K$. Men det betyder jo netop, at $f^k \to f$ i $\mathcal{B}(M)$.

En vigtig isometri.

Lad nu (M, d) være et metrisk rum, og lad $a \in M$ være fast. Vi definerer nu for $m \in M$ funktionen $f_m : M \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f_m(t) = d(t, m) - d(t, a).$$

Vi har for $t \in M$, at $|f_m(t)| = |d(t, m) - d(t, a)| \leq d(a, m)$. Dette medfører, at $\sup_{t \in M} |f_m(t)| \leq d(a, m)$. Da er $d(a, m)$ en majorant for $\{|f_m(t)| \mid t \in M\}$.

Lader vi nu $b \in \mathbb{R}$ være givet, så $|f_m(t)| \leq b$ for alle $t \in M$, skal vi vise, at $d(a, m) \leq b$. Men da $b \geq |f_m(m)| = |d(m, m) - d(m, a)| = d(a, m)$, har vi slutteligt, at $d(a, m) = \sup_{t \in M} |f_m(t)| = \|f_m\|_\infty$.

$f_m \in \mathcal{B}(M)$, da $\|f_m\|_\infty = d(a, m) < \infty$. Vi definerer nu $\varphi : M \to \mathcal{B}(M)$ ved $\varphi(m) = f_m$. Denne er faktisk en isometri; lader vi nemlig $m, n \in M$ være givet, kan vi definere afbildningen $g_m : M \to \mathbb{C}$ ved $g_m(t) = d(t, m) - d(t, n)$, hvorpå $\|g_m\|_\infty = d(m, n)$, da vi viste $\|f_m\|_\infty = d(a, m)$ for et fast $a \in M$; vi får nu

$$\begin{aligned}
\|\varphi(m) - \varphi(n)\|_\infty &= \|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{t \in M} |f_m(t) - f_n(t)| \\
&= \sup_{t \in M} |d(t, m) - d(t, n)| = \sup_{t \in M} |g_m(t)| = \|g_m\|_\infty = d(m, n).
\end{aligned}$$

Der findes altid en fuldstændiggørelse af et metrisk rum (M, d).

Der findes et metrisk rum $(\widetilde{M}, d_*)$ og en isometri $\varphi : (M, d) \to (\widetilde{M}, d_*)$, så $\varphi(M)$ er overalt tæt i $\widetilde{M}$.

Lad (M, d) være et metrisk rum. Idet vi lod $a \in M$ være fast, definerede vi for $m \in M$ funktionen $f_m : M \to \mathbb{C}$ givet ved $f_m(t) = d(t, m) - d(t, a)$. Vi fik dermed en isometri $\varphi : (M, d) \to (\mathcal{B}(M), \|\cdot\|_\infty)$ givet ved $\varphi(m) = f_m$.

Det er nu klart, at $\varphi(M) \subseteq \mathcal{B}(M)$, og dermed, at $\overline{\varphi(M)} \subseteq \mathcal{B}(M)$. Da en afsluttet delmængde af et fuldstændigt metrisk rum selv er et fuldstændigt metrisk rum, har vi, at det metriske rum $(\overline{\varphi(M)}, \|\cdot\|_\infty)$ er fuldstændigt. Da φ er en isometri fra M til $\overline{\varphi(M)} \subseteq \mathcal{B}(M)$, og da $\varphi(M)$ pr. definition er tæt i $\overline{\varphi(M)}$, er $(\overline{\varphi(M)}, \|\cdot\|_\infty)$ en fuldstændiggørelse af (M, d). Vi kan **altid** lave denne ud fra det tidligere fundne, uanset rummet (M, d).

Kapitel 2

Normerede rum og Hilbert rum

Definitioner.

Et *normeret rum* er et par $(E, \|\cdot\|)$, hvor E er et reelt eller komplekst vektorrum, og hvor $\|\cdot\|$ er en norm på E, dvs. en afbildning $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, som opfylder:

(N1) $\|x\| > 0$, hvis $x \neq 0$ i E

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ for alle $\lambda \in \mathbb{C}$ (i det reelle tilfælde $\mathbb{R}$) og $x \in E$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for alle $x, y \in E$.

Et *Banach rum* er et normeret rum, som er et fuldstændigt metrisk rum med hensyn til metrikken induceret af dens norm (idet vi lader metrikken d være givet ved $d(u, v) = \|u - v\|$ for $u, v \in E$).

Vi definerer endvidere et *indre produkt rum* eller et *præ-Hilbert rum* til at være et par $(V, (\cdot\,, \cdot))$, hvor V er et reelt eller komplekst vektorrum, og hvor $(\cdot\,, \cdot) : V \times V \to \mathbb{L}$ er et *indre produkt*; altså en afbildning, som for alle $x, y, z \in V$ og $\lambda \in \mathbb{L}$ opfylder:

(i) $(x, y) = \overline{(x, y)}$

(ii) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

(iii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

(iv) $(x, x) > 0$ for $x \neq 0$.

Et *Hilbert rum* er et indre produkt rum, som er et fuldstændigt metrisk rum med hensyn til metrikken induceret af dets indre produkt.

Der gælder, at *alle Hilbert rum er Banach rum*, men ikke i almindelighed det omvendte.

Fuldstændiggørelse af normeret rum.

Lad $(X, \|\cdot\|)$ være et normeret rum. En *fuldstændiggørelse* af X er et Banach rum $(X', \|\cdot\|')$ og en lineær afbildning $T : X \to X'$, som opfylder, at $\|T(x)\|' = \|x\|$ (altså, at T er en isometri), og at $\mathrm{clin}(T(X)) = X'$.

Sætning om ℓ_2 som fuldstændiggørelse af præ-Hilbert rum.

Lad $(X, \|\cdot\|_X)$ være et normeret rum med $X = \text{lin}\{e_1, e_2, \ldots\}$, hvor $e_1, e_2, \ldots$ er en uendelig ortonormalfølge i et præ-Hilbert rum. Lad endvidere $T : X \to \ell_2$ være den lineære afbildning givet ved $T(e_n) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, hvor 1 er på den n'te plads i følgen. Da gælder, at $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ og T er en fuldstændiggørelse af X.

Bevis. Strategien for beviset er at vise følgende trin, hvorpå det følger af definitionen på fuldstændiggørelse:

(1) $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ er et Banach rum,

(2) $\|T(x)\|_{\ell_2} = \|x\|_X \forall x \in X$, og

(3) $\overline{(T(X))} = \ell_2$.

(1) $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ er udstyret med den norm, der er induceret af det indre produkt defineret på ℓ_2, nemlig $\|x\|_{\ell_2} = (x, x)_{\ell_2}^{1/2}$. NY 3.2 giver da, at ℓ_2 er et fuldstændigt metrisk rum, med metrikken givet netop ved den ovenstående norm. Således er $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ et Hilbert rum, og derfor specielt et Banach rum.

(2) Lad $x \in X = \text{lin}\{e_1, e_2, \ldots\}$ være givet. Da er x på formen $x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n$, hvor $m \in \mathbb{N}$, e_n er vektorer i X og $\lambda_n \in \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Da gælder, at

$$\|T(x)\|_{\ell_2} = \left\| T\left(\sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \right) \right\|_{\ell_2} = (\star).$$

Da T er lineær, normen er homogen, samt at $e_1, e_2, \ldots$ er en ortonormalfølge og specielt et ortogonalt system (NY 4.4) følger det, at:

$$\begin{aligned}(\star) &= \left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T(e_n) \right\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} \|\lambda_n T(e_n)\|_{\ell_2}^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \|T(e_n)\|_{\ell_2}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2},\end{aligned}$$

hvoraf sidste lighed gælder, da der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $\|T(e_n)\|_{\ell_2} = 1$, thi $T(e_n) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, hvor 1 er på den n'te plads, og $\|y\|_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ for alle $y \in \ell_2$. NY 4.4, samt at normen er homogen, giver os da:

$$\|x\|_X = \left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \right\|_X = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} \|\lambda_n e_n\|_X^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \|e_n\|_X^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2},$$

hvoraf sidste lighed kommer af, at $e_1, e_2, \ldots$ er en ortonormalfølge i X, og heraf at $\|e_n\|_X = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Altså er $\|x\|_X = \|T(x)\|_{\ell_2}$ for alle $x \in X$.

(3) Lad $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$. Vi vil vise, at der findes en følge i $T(X)$, som konvergerer imod x.

Betragt for alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in X$, hvor $a_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$; vi har nu i $T(X)$, at $T(a_n) = T(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(e_k)$, hvilket vi får ud fra lineariteten af T.

Vi betragter nu følgen $(T(a_n)) \in T(X)$. Vi har for $n \in \mathbb{N}$, at

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k T(e_k) \right\|_{\ell_2} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k T(e_k) \right\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2},$$

som går imod 0, når $n \to \infty$, thi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Altså er x grænsepunkt for en følge i $T(X)$, og dermed er $\overline{T(X)} = \ell_2$. □

Separable Hilbert rum.

Et Hilbert rum $\mathcal{H}$ er *separabelt*, hvis det indeholder en tæt følge, dvs. hvis der er $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, så $\overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = M$.

NY giver en anden definition af denne term: et Hilbert rum $\mathcal{H}$ er separabelt, hvis den indeholder en fuldstændig ortonormalfølge (e_n) indiceret af en tællelig mængde, dvs. at hvis $(x, e_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, medfører det, at $x = 0$. NY 4.15 giver, at dette er ækvivalent med, at $\text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$.

Det viser sig, at disse to betingelser er ækvivalente:

Sætning 1. Et Hilbert rum $\mathcal{H}$ indeholder en tæt følge, hvis og kun hvis det indeholder en fuldstændig ortonormalfølge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dvs. hvis der findes en ortonormalfølge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, så $\text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$.

Bevis. Antag først, at der findes en ortonormalfølge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, således at $\text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$. Vi har, at

$$\mathcal{H} = \text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \overline{\left\{ \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \mid m \in \mathbb{N},\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \right\}} = \overline{A},$$

hvor $A = \{\sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \mid m \in \mathbb{N},\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}\}$. Vi har, at hver koefficient λ_n kan opsplittes $\lambda_n = \text{Re}\lambda_n + i\text{Im}\lambda_n$, hvor $\text{Re}\lambda_n, \text{Im}\lambda_n \in \mathbb{R}$. Vi betragter nu i stedet delmængden $B \subseteq A$, hvor B kun indeholder de λ_n, for hvilke realdelen og imaginærdelen er rationale, altså

$$B = \left\{ \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \mid m \in \mathbb{N},\, \text{Re}\lambda_1, \text{Im}\lambda_1, \ldots, \text{Re}\lambda_m, \text{Im}\lambda_m \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Denne mængde af elementer i $\mathcal{H}$ er tællelig, idet den er et produkt af tællelige mængder (hvor sindssyg denne mængde end er). Der kan derfor laves en bijektiv korrespondance mellem denne mængde og $\mathbb{N}$; lad φ være en sådan og definer nu følgen (x_n) i $\mathcal{H}$, hvor $x_n = \varphi(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$; da er $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Vi viser nu, at (x_n) er tæt, altså at $\overline{B} = \mathcal{H} = \overline{A}$. At $\overline{B} \subseteq \mathcal{H} = \overline{A}$ er trivielt, da $\overline{A}$ er afsluttet. Lad nu $y \in \overline{A}$ være givet. Da findes en følge (y_p) i A, så $y_p \to y$. Lad $k \in \mathbb{N}$ være givet. y_k i denne følge er på formen

$$y_k = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n = \sum_{n=1}^{m} (\text{Re}\lambda_n + i\text{Im}\lambda_n) e_n,$$

hvor $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Da $\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$, findes følger $(a_{k,n,l})$ og $(b_{k,n,l})$ i $\mathbb{Q}$, så $a_{k,n,l} \to \text{Re}\lambda_n$ og $b_{k,n,l} \to \text{Im}\lambda_n$ for $l \to \infty$, for alle $n = 1, \ldots, m$. I $\mathbb{C}$ får vi altså, at

$$\lim_{l\to\infty}(a_{k,n,l} + ib_{k,n,l}) = \text{Re}\lambda_n + i\text{Im}\lambda_n = \lambda_n.$$

Hvis vi har en følge (c_l) i $\mathbb{C}$, hvorom der gælder, at $c_l \to c$, vil der gælde i et Hilbert rum V for $x \in V$, at $c_l x \to cx$, thi $\|cx - c_l x\| = |c - c_l|\|x\| \to 0$. Dermed vil også gælde, at $\lim_{l\to\infty}(a_{k,n,l} + ib_{k,n,l})e_n = \lambda_n e_n$ i $\mathcal{H}$.

Vi får heraf, at $y_{k,l} = \sum_{n=1}^{m}(a_{k,n,l} + ib_{n,k,l})e_n \in B$ for alle $l \in \mathbb{N}$. Altså vil gælde, at $\lim_{l\to\infty} y_{k,l} \in \overline{B}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, men

$$\lim_{l\to\infty} y_{k,l} = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(a_{k,n,l} + ib_{n,k,l})e_n = \sum_{n=1}^{m}\lim_{l\to\infty}(a_{k,n,l} + ib_{n,k,l})e_n = \sum_{n=1}^{m}\lambda_n e_n.$$

Altså vil $y_k \in \overline{B}$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Da vil grænsepunktet y for følgen (y_p), nu i $\overline{B}$, ligge i clos$\overline{B} = \overline{B}$, thi $\overline{B}$ er en afsluttet mængde og $\overline{B} \subseteq \overline{B}$, hvorpå clos$\overline{B} = \overline{B}$. Men da vil $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, og dermed $\overline{A} = \overline{B}$. Dvs. at $\mathcal{H} = \overline{B} = \overline{\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$, hvorpå $\mathcal{H}$ indeholder en tæt følge (x_n).

Antag nu, at $\mathcal{H}$ indeholder en tæt følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Lad $y_1 = x_1$, og lad y_i være det element x_m med mindste $m \in \mathbb{N}$, så $x_m \notin \text{lin}\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$. Derpå opnås en endelig eller tælleligt uendelig familie $(y_i)_{i\in I}$ af lineært uafhængige vektorer i $\mathcal{H}$, hvorom der gælder, at $\text{lin}\{y_i \,|\, i \in I\} = \text{lin}\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Vi kan ortogonalisere disse med Gram-Schmidt-metoden og derpå normere dem, hvorpå opnås et ortonormalsystem $(z_i)_{i\in I}$ af vektorer. Da vi, når vi laver Gram-Schmidt, kun lægger vektorer i $(y_i)_{i\in I}$ påganget konstanter i $\mathbb{C}$ til vektorer $(y_i)_{i\in I}$, hvorpå der normeres med konstanter i $\mathbb{C}$, må $\text{lin}\{z_i \,|\, i \in I\} = \text{lin}\{y_i \,|\, i \in I\}$, hvorpå $\text{clin}\{z_i \,|\, i \in I\} = \text{clin}\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \supseteq \overline{\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}$. Da er $(z_i)_{i\in I}$ en fuldstændig ortonormalfølge. $\square$

Af dette får vi altså, at de to definitioner på termen *separabelt Hilbert rum* er ækvivalente.

KAPITEL 3

ORTOGONALE PROJEKTIONER

Definitioner.

To vektorer x, y i et præ-Hilbert rum $(V, (\cdot, \cdot))$ er *ortogonale*, såfremt $(x, y) = 0$. En familie af vektorer $(e_i)_{i \in I}$ kaldes et *ortogonalsystem*, såfremt $(e_i, e_j) = 0$ for $i \neq j$; hvis $\|e_i\| = 1$ for alle $i \in I$, kaldes familien et *ortonormalsystem*. Hvis et ortogonalsystem kan indiceres som en følge med $\mathbb{N}$, kaldes den en *ortonormalfølge*. En *ortonormalbasis* i et Hilbert rum $\mathcal{H}$ er et fuldstændigt ortonormalsystem, altså et ortonormalsystem, hvorom der gælder, at den eneste vektor i $\mathcal{H}$ ortogonal med alle vektorer i systemet er nulvektoren.

Tætteste-punkt-egenskab.

Lad A være en ikke-tom, afsluttet og konveks delmængde af et Hilbert rum $\mathcal{H}$. Da findes for alle $x_0 \in \mathcal{H}$ et entydigt $y \in A$, således at y er tættere på x_0 end noget andet punkt i A, altså så

$$\|x_0 - y\| = \inf_{a \in A} \|x_0 - a\|.$$

"Indskrænkning" af beviset for tætteste-punkt-egenskab.

Lader vi $(E, \|\cdot\|)$ være et normeret vektorrum, gælder for fast $x_0 \in E$, at $T : E \to E$ givet ved $T(x) = x + x_0$ er en isometri, thi $\|x + x_0 - (y + x_0)\| = \|x - y\|$ for $x, y \in E$. Denne isometri er endvidere bijektiv, og dens inverse er $T^{-1} : E \to E$ givet ved $T^{-1}(x) = x - x_0$.

For at vise, at tætteste-punkt-egenskaben gælder for alle $x_0 \in E$, rækker det at vise, at tætteste-punkt-egenskaben gælder for $x_0 = 0$. Antag, at den gælder for $x_0 = 0$; altså, at der gælder i et Hilbert rum $\mathcal{H}$, hvor $\emptyset \neq B \subseteq \mathcal{H}$ er afsluttet og konveks, at der findes et entydigt $y' \in B$, så $\|y'\| = \inf_{b \in B} \|b\|$.

Lad $x_0 \in \mathcal{H}$ være givet, og lad $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{H}$ være afsluttet og konveks. Dan isometrien T som ovenfor i $\mathcal{H}$ (hvilket er ladsiggørligt, da $\mathcal{H}$ er et normeret rum), og betragt nu mængden $T^{-1}(A) \subseteq \mathcal{H}$.

Denne er ikke-tom og afsluttet, thi T er en isometri (dermed kontinuert) og A er ikke-tom og afsluttet. Tillige er den konveks, thi for $p, p' \in T^{-1}(A)$ og $t \in [0, 1]$ gælder, at der findes $q, q' \in A$, så $q = T(p) = p + x_0$, $q' = T(p') = p' + x_0$, hvorpå

$$T(tp + (1-t)p') = t(q - x_0) + (1-t)(q' - x_0) + x_0 = tq + (1-t)q' \in A,$$

da A er konveks; altså $tp + (1-t)p' \in T^{-1}(A)$.

Da findes et $y' \in T^{-1}(A)$, så $\|y'\| = \inf_{b \in T^{-1}(A)} \|b\|$, og dette y' er entydigt. Ud fra T's bijektivitet, gælder for $y' \in T^{-1}(A)$, at der findes entydigt $y \in A$, så $y = T(y')$, dvs. $y' = y - x_0$.

Endvidere gælder også, ud fra T's bijektivitet, at der for alle $b \in T^{-1}(A)$ eksisterer et entydigt $a \in A$, så $a = T(b) = b + x_0$ dvs. $b = a - x_0$. Da gælder

$$\inf\{\|b\| \mid b \in T^{-1}(A)\} = \inf\{\|a - x_0\| \mid a - x_0 \in T^{-1}(A)\} = \inf\{\|a - x_0\| \mid a \in A\}.$$

Dette giver altså $\|y - x_0\| = \inf_{a \in A} \|a - x_0\|$. Deraf får vi, hvad vi skulle vise: der findes entydigt $y \in A$ for fast $x_0 \in \mathcal{H}$, så $\|y - x_0\| = \inf_{a \in A} \|a - x_0\|$.

Men også kun for Hilbert rum.

"Generaliserer" vi $\mathcal{H}$ til at være et Banach rum, ryger entydigheden. Et eksempel på at entydigheden ikke gælder, hvis der ikke er tale om et Hilbert rum, kunne være det normerede rum $\mathbb{R}^2$ med normen $\|\cdot\|_1$: Lad $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1,\ x \in [0, 1]\big\}$. Da er A afsluttet i $\mathbb{R}^2$, og konveks, idet der for alle $z, w \in A$, hvor $z = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2)$ og $t \in [0, 1]$ gælder at

$$\begin{aligned} tz + (1-t)w &= t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2) \\ &= (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2), \end{aligned}$$

hvor det ses, at der for andetkoordinatet gælder:

$$\begin{aligned} ty_1 + (1-t)y_2 &= -tx_1 - x_2 + 1 + tx_2 - t \quad = \quad -(tx_1 + x_2 - tx_2) + 1 \\ &= -(tx_1 + (1-t)x_2) + 1, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $tz + (1-t)w \in A$, og A er altså konveks; men vi har samtidig, at alle punkter i A har afstand 1 til $(1, 1)$. Alle punkter i A er derfor nærmeste punkt til $(1, 1)$, og entydigheden gælder altså ikke i dette tilfælde.

En dejlig egenskab.

Lad $\mathcal{H}$ være et indre produkt-rum og $z \in \mathcal{H}$ være givet. Da er snitfunktionen $x \mapsto (x, z)$ kontinuert. Dette indses med Cauchy-Schwarz, idet

$$|(a, y) - (x, y)| = |(a - x, y)| \le \|a - x\|\|y\| < \delta\|y\|,$$

hvorpå vi sætter $\delta = \varepsilon\|y\|^{-1}$.

Ortogonale komplementer.

Det *ortogonale komplement* til en delmængde $\mathcal{E}$ af et Hilbert rum $\mathcal{H}$ (med det indre produkt $(\cdot, \cdot)$) defineres ved $\mathcal{E}^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid (x, y) = 0 \text{ for alle } y \in \mathcal{E}\}$. Der gælder for alle delmængder $\mathcal{E}$ af et Hilbert rum $\mathcal{H}$, at $\mathcal{E}^\perp$ **er et lukket underrum.**

Bevis. Lad $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$ være givet. $\mathcal{E}^\perp$ er først og fremmest ikke-tom, da $0 \in \mathcal{E}^\perp$, idet $(0, y) = 0$ for alle $y \in \mathcal{E}$. Lad derpå $x, y \in \mathcal{E}^\perp$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ være givet. Da er $(x, z) = 0$ og $(y, z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{E}$, hvorpå $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) = 0$ og $(\lambda x, z) = \lambda(x, z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{E}$. Altså er $x + y, \lambda x \in \mathcal{E}^\perp$, og $\mathcal{E}^\perp$ er et underrum.

Lader vi en konvergent følge (x_n) i $\mathcal{H}$ med punkter i $\mathcal{E}^\perp$ være givet, vil vi vise, at grænsepunktet x ligger i $\mathcal{E}^\perp$, altså at $(x, z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{E}$. Lad derfor $z \in \mathcal{E}$ være givet. Da vil med ovenstående dejlige egenskab gælde, at $(x, z) = \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, hvorpå grænsepunktet for en følge i $\mathcal{E}^\perp$ er i $\mathcal{E}^\perp$; $\mathcal{E}^\perp$ er lukket. □

Lukkede underrum.

Lad $\mathcal{M}$ være et lukket underrum af Hilbert rummet $\mathcal{H}$. Underrummet $\mathcal{M}$ kan betragtes som et præ-Hilbert rum med det indre produkt fra $\mathcal{H}$ ved restriktion af det indre produkt til $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ (da vektorerne i $\mathcal{M}$ også er vektorer i $\mathcal{H}$). Da $\mathcal{M}$ er lukket, er delrummet $\mathcal{M}$ med den arvede metrik fra $\mathcal{H}$ fuldstændigt pr. CB 5.3, thi $\mathcal{H}$ er et fuldstændig metrisk rum. Altså er $\mathcal{M}$ et Hilbert rum med det indre produkt fra $\mathcal{H}$.

Sætning 2 (Projektionssætningen)**.** Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum og lad $\mathcal{M}$ være et lukket underrum af $\mathcal{H}$. Lad $x \in \mathcal{H}$ og $y \in \mathcal{M}$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(1) $x - y \in \mathcal{M}^\perp$

(2) $\|x - y\| = \inf_{m\in\mathcal{M}} \|x - m\|$

(3) $(y, m) = (x, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$

Bevis. Vi viser (1) $\Leftrightarrow$ (2) og (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2): Antag $x - y \in \mathcal{M}^\perp$.

Da gælder iflg. NY 4.23 at $\|x - y - z\| \geq \|x - y\|$ for alle $z \in \mathcal{M}$. For alle $m \in \mathcal{M}$ gælder nu, at $m - y \in M$ (da $\mathcal{M}$ er et underrum), så for alle $m \in \mathcal{M}$ gælder, at $\|x-y\| \leq \|x-y-(m-y)\| = \|x-m\|$. Altså er $\|x-y\|$ minorant for mængden $\{\|x - m\| \mid m \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathbb{R}$. At $\|x - y\|$ også er største minorant, følger af, at hvis vi har et $b \in \mathbb{R}$, så $b \leq \|x - m\|$ for alle $m \in \mathcal{M}$, så vil $b \leq \|x - y\|$, thi $y \in \mathcal{M}$. Altså er $\|x - y\| = \inf_{m\in\mathcal{M}} \|x - m\|$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Antag $\|x - y\| = \inf_{m\in\mathcal{M}} \|x - m\|$.

Da er $\|x-y\| \leq \|x-m\|$ for alle $m \in \mathcal{M}$. For alle $z \in \mathcal{M}$ gælder, at $y+z \in \mathcal{M}$ (da $\mathcal{M}$ er et underrum), så for alle $z \in \mathcal{M}$ vil $\|x-y\| \leq \|x-(y+z)\| = \|x-y-z\|$, hvilket pr. NY 4.23 giver, at $x - y \in \mathcal{M}^\perp$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): $x - y \in \mathcal{M}^\perp$ er pr. definition ækvivalent med, at $(x - y, m) = 0$ for alle $m \in \mathcal{M}$, som er ækvivalent med pr. NY 1.2, at $(x, m) - (y, m) = 0$ for alle $m \in \mathcal{M}$, som er ækvivalent med, at $(x, m) = (y, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$. □

Korollar 3 (Entydighed)**.** Med betingelserne i projektionssætningen er y entydigt bestemt ved (1), (2) og (3).

Bevis. Her er det selvfølgelig nok at vise en enkelt.

Antag (1): $x - y \in \mathcal{M}^\perp$. Lad endvidere $z \in \mathcal{M}$, så $x - z \in \mathcal{M}^\perp$; vi skal vise, at $z = y$. Det ses, at der gælder for alle $h \in \mathcal{H}$, hvor $h = h_m + h_{m^\perp}$ med $h_m \in \mathcal{M}$, $h_{m^\perp} \in \mathcal{M}^\perp$:

$$\begin{aligned}
(y - z, h) &= (x - z - (x - y), h_m + h_{m^\perp}) \\
&= (x - z, h_m) - (x - y, h_m) + (x - z, h_{m^\perp}) - (x - y, h_{m^\perp}) \\
&= (x - z, h_{m^\perp}) - (x - y, h_{m^\perp}) \\
&= (y - z, h_{m^\perp}) = 0
\end{aligned}$$

hvoraf sidste lighed kommer af, at $y, z \in M$.

Antag (2): $\|x - y\| = \inf_{m \in \mathcal{M}} \|x - m\|$. Da $M \neq \emptyset$ (thi $y \in \mathcal{M}$) er lukket og konveks (da $\mathcal{M}$ er et underrum) i Hilbert rummet $\mathcal{H}$, følger af tætteste-punkt-egenskaben, at y er entydigt bestemt.

Antag (3): $(x, m) = (y, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$. Vi viser, at hvis $(x, m) = (z, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$, er $z = y$; da $\mathcal{M}$ er et Hilbert rum og $(z, m) = (x, m) = (y, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$, er $z = y$. □

Ortonormaludviklinger.

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum og lad $\mathcal{M}$ være et lukket underrum af $\mathcal{H}$. Lad $x \in \mathcal{H}$. Hvis $e_1, \ldots$ er en ortonormalbasis for $\mathcal{M}$ (altså en fuldstændigt ortonormalsystem i Hilbert rummet $\mathcal{M}$), vil $y = (x, e_1)e_1 + \cdots \in \mathcal{M}$ opfylde (1), (2) og (3). Altså vil y være det punkt i $\mathcal{M}$, der er tættest på $x \in \mathcal{H}$. Er $\sharp\{e_1, \ldots\} = \infty$, forstås højresiden som summen af en konvergent række.

Sætning 4. En ortonormalfølge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i et Hilbert rum $\mathcal{H}$ er symmetrisk i den forstand, at for hver følge $(\lambda_n) \in l_2$ og hver bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}.$$

Bevis. Vi har, at $\operatorname{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er et lukket underrum pr. NY 2.9 og NY 2.12 (da $\operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er et underrum); sæt $\mathcal{M} = \operatorname{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, hvormed vi kan benytte projektionssætningen direkte på $\mathcal{M}$. Vi husker i det følgende, at $\mathcal{M}$ dermed er et Hilbert rum.

Med den givne bijektion σ sættes $\delta_n = \lambda_{\sigma(n)}$ og $f_n = e_{\sigma(n)}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n f_n$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{\sigma(n)}|^2 < \infty$ – da ethvert ombytte af den absolut konvergente række $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ er konvergent, jf. Kalkulus og da $(\lambda_n) \in l_2$ – følger af NY 4.11, at $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n f_n$ konvergerer i $\mathcal{H}$ og dermed også $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$.

Vi har altså, at $z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} \in \mathcal{H}$. Da følgen $(\sum_{n=1}^{m} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)})$ med elementer i $\operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergerer imod z for $m \to \infty$, må $z \in \mathcal{M}$.

Vi har defineret $\mathcal{M}$, så $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis i $\mathcal{M}$ (NY 4.15). Nu vil pr. NY 4.14 gælde, da $z \in \mathcal{M}$, at

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (z, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}, e_k \right) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}, e_k \right) e_k,$$

da det indre produkt er kontinuert, og endvidere, at

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\sigma(n)}\left(e_{\sigma(n)}, e_k\right)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(e_k, e_k\right)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k,$$

thi (e_n) er en ortonormalbasis, hvorpå det eneste n, så $(e_{\sigma(n)}, e_k) \neq 0$, er det n, så $\sigma(n) = k$. Men da er $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n = z = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\sigma(n)}e_{\sigma(n)}$ i $\mathcal{H}$. □

Ortogonale projektioner.

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum og lad $\mathcal{M}$ være et lukket underrum af $\mathcal{H}$.

Vi definerer nu afbildningen $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ved $P(x) = y$, hvor $y \in \mathcal{M}$ opfylder (1), (2) og (3) i projektionssætningen for $x \in \mathcal{H}$. Definitionen giver mening, da y var entydigt bestemt ved x.

Med denne afbildning har vi altså, at $(P(x), m) = (x, m)$ for alle $x \in \mathcal{H}$ og $m \in \mathcal{M}$. Billedet af P er $P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$. Antag i det følgende, at $\mathcal{M} \neq \{0\}$.

(0) P er en *lineær operator*, dvs. $P(\lambda x + \mu y) = \lambda P(x) + \mu P(y)$ for alle $x, y \in \mathcal{H}$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Lad $x, y \in \mathcal{H}$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ være givet.

Da vi nemlig har, at $(P(x), m) = (x, m)$ og $(P(y), m) = (y, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$, er $\lambda(P(x), m) = \lambda(x, m)$ og $\mu(P(y), m) = \mu(y, m)$ for alle $m \in \mathcal{M}$. Vi har altså med NY 1.2, at

$$\begin{aligned}(\lambda P(x) + \mu P(y), m) &= \lambda(P(x), m) + \mu(P(y), m) = \lambda(x, m) + \mu(y, m) \\ &= (\lambda x + \mu y, m) = (P(\lambda x + \mu y), m),\end{aligned}$$

for alle $m \in \mathcal{M}$. Altså vil $P(\lambda x + \mu y) = \lambda P(x) + \mu P(y)$ jf. NY 1.5 i Hilbert rummet $\mathcal{M} = P(\mathcal{H})$, og P er en lineær operator på $\mathcal{H}$.

(1) P er sin egen *adjungerede* eller *selvadjungeret*, dvs. $(P(x), y) = (x, P(y))$ for $x, y \in \mathcal{H}$. Lad nemlig $x, y \in \mathcal{H}$ være givet; da gælder i $\mathbb{C}$

$$(P(x), y) = \overline{(y, P(x))} = \overline{(P(y), P(x))} = (P(x), P(y)) = (x, P(y)).$$

(2) P er endvidere *idempotent*, dvs. $P^2 = P$. Dette ses let, idet vi lader $x \in \mathcal{H}$ være givet, hvorpå $(P(P(x)), m) = (P(x), m)$ for alle $m \in \mathcal{H}$. Da er $P(P(x)) = P(x)$ i $\mathcal{M} = P(\mathcal{H})$.

(3) Hvis $\|P\| = 0$, vil $P(x) = 0$ for alle $x \in \mathcal{H}$. Altså vil $\|P\| \neq 0$, idet vi har antaget $P(\mathcal{H}) \neq \{0\}$. Vi har slutteligt, at $\|P\| = 1$, hvor $\|P\| = \sup_{x\in\mathcal{H},\, \|x\|\leq 1}\|P(x)\|$. Lad nemlig $0 \neq x \in \mathcal{H}$, $\|x\| \leq 1$ være givet. Da er

$$\|P(x)\| = \frac{(P(x), P(x))}{\|P(x)\|} = \frac{(x, P(x))}{\|P(x)\|} \leq \|x\| \leq 1$$

grundet Cauchy-Schwarz' ulighed. Da også $\|P(0)\| = \|0\| \leq 1$, fås, at $\|P\| \leq 1$ for alle $x \in H$. Samtidig har vi, da P er idempotent, at

$$\|P(x)\| = \|P(P(x))\| \leq \|P\|\|P(x)\|$$

jf. NY 7.1, hvorpå $\|P\| \geq 1$. Altså er $\|P\| = 1$.

Afbildningen P med billede $P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$ kaldes den *ortogonale projektion på* $\mathcal{M}$. Vi ser med projektionssætning, at P sender et punkt over i det tætteste punkt i $\mathcal{M}$; deraf navnet.

Mere om ortogonale projektioner.

Vi beholder $\mathcal{H}$ og $\mathcal{M}$ fra før i det følgende. Hvis $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{M}^\perp$ er den ortogonale projektion på $\mathcal{M}^\perp$, sender Q et vilkårligt x over i det tætteste punkt på $\mathcal{M}^\perp$, $Q(x)$. Nu kan dette x skrives $x = z + y$, hvor z er det tætteste punkt i $\mathcal{M}^\perp$ og $y \in \mathcal{M}$. Altså vil $z = x - y$ ligge i $\mathcal{M}^\perp$. Med projektionssætningen fås nu, at $y = P(x)$. Altså er tætteste punkt til x på $\mathcal{M}^\perp$ dermed $Q(x) = z = x - P(x)$.

Den ortogonale projektion på $\mathcal{M}^\perp$ er altså $1_\mathcal{H} - P$.

Last but not least.

Lad $\mathcal{H}$ være det samme Hilbert rum som før. Lad $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ være en *begrænset lineær operator*; der findes altså $M \geq 0$, så $\|B(x)\| \leq M\|x\|$ for alle $x \in \mathcal{H}$. Lad endvidere B være selvadjungeret og idempotent.

Der gælder, at $B(\mathcal{H})$ er et lukket underrum i $\mathcal{H}$, og at B er den ortogonale projektion på $B(\mathcal{H})$.

Bevis. At $B(\mathcal{H})$ er et underrum, følger af, at $B(\mathcal{H}) \neq \emptyset$, thi $B(0) = 0 \in B(\mathcal{H})$, og af, at B er lineær.

Lad en konvergent følge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{H}$ med punkter i $B(\mathcal{H})$ være givet, hvor $y_n \to y$. Vi skal vise, at $y \in B(\mathcal{H})$; at der findes $x \in \mathcal{H}$, så $B(x) = y$. Da $y_n \in B(\mathcal{H})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, findes x_n for alle $n \in \mathbb{N}$, så $B(x_n) = y_n$. Da B er begrænset er B kontinuert iflg. NY 7.4. Men da

$$y_n = B(x_n) = B(B(x_n)) = B(y_n) \to B(y) \in B(\mathcal{H})$$

grundet kontinuiteten og idempotensen af B, må $y = B(y) \in B(\mathcal{H})$, thi enhver følge i et metrisk rum højst har ét grænsepunkt. Dermed er $B(\mathcal{H})$ lukket.

Det skal vises, at B sender x over i det tætteste punkt i $B(\mathcal{H})$; altså at $x - B(x) \in B(\mathcal{H})^\perp$, pr. projektionssætningen for et givet $x \in \mathcal{H}$. Men vi har, at $B(x - B(x)) = B(x) - B(B(x)) = B(x) - B(x) = 0$, så $x - B(x) \in \ker B$. Et lemma i kapitel 6 giver, at $\ker B = \text{clos}(\text{ran}B^*)^\perp = \text{clos}(\text{ran}B)^\perp = B(\mathcal{H})^\perp$, thi B er selvadjungeret og $B(\mathcal{H})$ er lukket. Altså vil $x - B(x) \in B(\mathcal{H})^\perp$ for alle $x \in \mathcal{H}$. $\square$

KAPITEL 4

FOURIER-RÆKKER

Fourier-rækken

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ er en ortonormal udvidelse af $f \in L_2(-\pi,\pi)$, når der gælder

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, n \in \mathbb{Z},$$

samt at $L_2(-\pi,\pi)$ er udstyret med det indre produkt $(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$.

Vi definerer i det følgende $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved $e_n(x) = e^{inx}$ for $n \in \mathbb{Z}$. Ovenstående betyder altså, at $L_2(-\pi,\pi) \ni f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ i $L_2(-\pi,\pi)$, hvor $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis for $L_2(-\pi,\pi)$, og $c_n(f) = (f, e_n)$.

Hvis disse påstande skulle bevises, ville vi skulle vise følgende:

(1) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalfølge i $L_2(-\pi,\pi)$.

(2) At $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis, som iflg. NY 4.15 er det samme som at $\text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = L_2(-\pi,\pi)$. Dette kan f.eks. vises ved at vise $C^{2\pi}$ ligger tæt i $C[-\pi,\pi]$, og at $C[-\pi,\pi]$ ligger tæt i $L_2(-\pi,\pi)$. Der skal det naturligt også vises, at dette medfører $\text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = L_2(-\pi,\pi)$.

2π-periodiske kontinuerte funktioner med supremumsnormen.

Der gælder, at $(C^{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ er et Banach rum, hvor

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|.$$

Bevis. Vi vælger først at vise, at $C[-\pi,\pi]$ er et Banach rum; beviset kan også bruges til at vise, at $C^{2\pi}$ er et Banach rum, blot man husker at vise, at $f(\pi) = f(pi)$.

Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchyfølge i $(C[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$. For alle $x \in [-\pi,\pi]$ vil $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f_n(x) - f(x)|$. Dvs. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy i $\mathbb{C}$. Da følgen konvergerer, idet $\mathbb{C}$ er et fuldstændigt metrisk rum, vil

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ være veldefineret. Dette er vores bud på en grænse for $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $C[-\pi,\pi]$.

Vi ønsker nu at vise, at $f \in C[-\pi,\pi]$, altså at $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ er kontinuert; altså for alle $x \in [-\pi,\pi]$ og for alle $\varepsilon > 0$, at der eksisterer et $\delta > 0$ så $\|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Lad derfor $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes et $N \in \mathbb{N}$ så når $n, m \geq N$ er $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{6}$ for alle $x \in [-\pi,\pi]$. Dette medfører for alle $x \in [-\pi,\pi]$:

$$\begin{aligned}
|f_N(x) - f(x)| &= |f_N(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\
&\leq |f_N(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{6} + |f_m(x) - f(x)|
\end{aligned}$$

Vi kan endvidere for hvert $x \in [-\pi,\pi]$ finde et $M \in \mathbb{N}$, så når $m > M$, er $|f_m(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{6}$ for alle $x \in [-\pi,\pi]$, hvilket så medfører, at $|f_N(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ for alle $x \in [-\pi,\pi]$ $(\star)$.

Lad nu $x \in [-\pi,\pi]$ være givet. Da findes $\delta > 0$, så når $\|x - y\| < \delta$, er $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, da f_N er kontinuert. Dette giver endvidere, at hvis $\|x - y\| < \delta$, så gælder

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

hvilket altså viser, at f er kontinuert, og altså at $f \in C[-\pi,\pi]$. Det ses endvidere at $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$ i $C[-\pi,\pi]$ ud fra $(\star)$.

Lad (f_n) være en konvergent følge med følgeelementer i $C^{2\pi}$ i Banach rummet $(C[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$. Da findes $f \in C[-\pi,\pi]$, så $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$. Specielt vil $|f_n(-\pi) - f(-\pi)| \to 0$ og $|f_n(\pi) - f(\pi)| \to 0$. Altså vil $f(-\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(-\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = f(\pi)$. Altså er $f \in C^{2\pi}$. Dermed er $C^{2\pi}$ lukket i $(C[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$, hvorpå $(C^{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ er et Banach rum. □

Ortonormalbasis.

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis for $L_2(-\pi,\pi)$ mht. $\|\cdot\|_2$.

Bevis. Beviset forløber over 4 trin:

(1) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalfølge i $L_2(-\pi,\pi)$. For $n = m$ fås nemlig:

$$\begin{aligned}
(e^{int}, e^{imt}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1;
\end{aligned}$$

og for $n \neq m$ fås:

$$\begin{aligned}
(e^{int}, e^{imt}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-m)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(n-m)i}e^{it(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(n-m)i}\left(e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(n-m)i}\cdot 2i\sin(\pi(n-m)) = 0.
\end{aligned}$$

(2) Fejérs teorem siger nu, at enhver funktion i $C^{2\pi}$ kan tilnærmes i $\|\cdot\|_\infty$ som en linearkombination af elementer i $\mathrm{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, hvorfor $\mathrm{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ligger tæt i $C^{2\pi}$ mht. $\|\cdot\|_\infty$. Da alle konvergenser i $\|\cdot\|_\infty$ også er konvergenser i $\|\cdot\|_2$ (thi $(2\pi)^{-1/2}\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ for $f \in L_2(-\pi,\pi)$), gælder da også, at $\mathrm{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ligger tæt i $C^{2\pi}$ mht. $\|\cdot\|_2$.

(3) $C^{2\pi}$ ligger tæt i $C[-\pi,\pi]$ i $\|\cdot\|_2$.

Lad $f \in C[-\pi,\pi]$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $a = \varepsilon^2/3\|f\|_\infty^2$ og lad $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ være givet ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{a}f(x) & \text{for } x \in [-\pi, -\pi+a] \\ f(x) & \text{for } x \in (-\pi+a, \pi-a) \\ \frac{\pi-x}{a}f(x) & \text{for } x \in [\pi-a, \pi] \end{cases}$$

Vi har nu, at $g \in C^{2\pi}$. Definerer vi tillige $g_0(x) = 0$ for alle $x \in [-\pi,\pi]$, ser vi også, at $g_0 \in C^{2\pi}$. Gælder $\|f\|_\infty^2 > \varepsilon^2/3\pi$, har vi, at

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|^2dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi+a}|f(t)-g(t)|^2dt + \int_{\pi-a}^{\pi}|f(t)-g(t)|^2dt \\
&= \int_{-\pi}^{-\pi+a}\left|\frac{a-t-\pi}{a}f(t)\right|^2dt + \int_{\pi-a}^{\pi}\left|\frac{a-\pi+t}{a}f(t)\right|^2dt \\
&\leq \|f\|_\infty^2\left(\int_{-\pi}^{-\pi+a}\left|\frac{a-t-\pi}{a}\right|^2dt + \int_{\pi-a}^{\pi}\left|\frac{a-\pi+t}{a}\right|^2dt\right) \\
&\leq \|f\|_\infty^2 2a < \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Gælder $\|f\|_\infty^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{3\pi}$, har vi, at

$$\|f-g_0\|_2^2 = \|f\|_2^2 \leq 2\pi\|f\|_\infty^2 < \varepsilon^2,$$

og dermed kan vi for enhver kugle i $C[-\pi,\pi]$, mht. $\|\cdot\|_2$, med centrum $f \in C[-\pi,\pi]$ og radius ε finde en funktion $h \in C^{2\pi}$, så h er indeholdt i kuglen. Dermed er $C^{2\pi}$ tæt i $C[-\pi,\pi]$.

(4) Vi har nu vist, at enhver $C[-\pi,\pi]$-funktion kan tilnærmes i $\|\cdot\|_2$ med en $C^{2\pi}$-funktion, men vi har også fra Fejérs teorem, at enhver $C^{2\pi}$-funktion kan tilnærmes i samme norm med en funktion i $\mathrm{lin}\{e_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$, og ved yderligere, at $C[-\pi,\pi]$ ligger tæt i $L^2(-\pi,\pi)$ mht. $\|\cdot\|_2$. Lad derfor $f\in L^2(-\pi,\pi)$ og $\varepsilon>0$ være givet. Nu findes en funktion $\varphi_1\in C[-\pi,\pi]$, så $\|f-\varphi_1\|_2<\varepsilon/3$, en funktion $\varphi_2\in C^{2\pi}$, så $\|\varphi_1-\varphi_2\|_2<\varepsilon/3$ og en funktion $\varphi_3\in\mathrm{lin}\{e_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$, så $\|\varphi_2-\varphi_3\|_2<\varepsilon/3$. Altså vil

$$\|f-\varphi_3\|_2\le\|f-\varphi_1\|_2+\|\varphi_1-\varphi_2\|_2+\|\varphi_2-\varphi_3\|_2<\varepsilon,$$

hvorpå $\mathrm{clin}\{e_n\mid n\in\mathbb{Z}\}=L^2(-\pi,\pi)$.

□

Entydighedssætning.

Lad $f,g\in C[-\pi,\pi]$. Antag, at $c_n(f)=c_n(g)$ for alle $n\in\mathbb{Z}$. Da er $f(t)=g(t)$ for alle $t\in[-\pi,\pi]$.

Bevis. Specielt gælder $f,g\in L^2(-\pi,\pi)$. Da vi fandt i det foregående, at $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ var en ortonormalbasis for $L^2(-\pi,\pi)$ – et Hilbert rum – har vi for alle $h\in L^2(-\pi,\pi)$, at $h=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(h,e_n)e_n$. Vi har endvidere pr. antagelse for alle $n\in\mathbb{Z}$, at $(f,e_n)=c_n(f)=c_n(g)=(g,e_n)$. Da det indre produkt er kontinuert, får vi for alle $h\in L^2(-\pi,\pi)$, at

$$\begin{aligned}(f,h) &= \left(f,\sum_{n\in\mathbb{Z}}(h,e_n)e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{(h,e_n)}(f,e_n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{(h,e_n)}(g,e_n) = \left(g,\sum_{n\in\mathbb{Z}}(h,e_n)e_n\right) = (g,h),\end{aligned}$$

hvormed $f=g$ i $L^2(-\pi,\pi)$. Altså vil $f-g=0$ næsten overalt på $[-\pi,\pi]$, men da f og g var antaget kontinuerte, må deres differens også være kontinuert; altså er $f-g=0$ **overalt** på $[-\pi,\pi]$, hvormed det ønskede er vist. □

Bemærk, at kontinuiteten af f og g netop medfører, at vi kan konkludere lighed for dem; ved vi ikke, at f og g er kontinuerte, kan vi allerbedst konkludere lighed m-næsten overalt.

Lemma.

$f\mapsto c_n(f)$ for $f\in L^2(-\pi,\pi)$ er lineær, thi for $f,g\in L^2(-\pi,\pi)$ og $\lambda\in\mathbb{C}$ er

$$\begin{aligned}c_n(f+\lambda g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)+\lambda g(t))e^{-int}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\mathrm{d}t+\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}\mathrm{d}t = c_n(f)+\lambda c_n(g).\end{aligned}$$

En unitær afbildning.

Afbildningen $T : L^2(-\pi,\pi) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ givet ved

$$T(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

er unitær.

Bevis. Det er selvfølgelig vigtigt, at vi faktisk får en følge i ℓ_2 (denne følge kan omindiceres til de naturlige tal - se beviset for NY 5.6 - hvorpå vi kan regne med rækkerne og kompositionerne som i $\ell_2(\mathbb{N})$). $L^2(-\pi,\pi)$ indeholder en ortonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; for $f \in L^2(-\pi,\pi)$ gælder, at $c_n(f) = (f, e_n)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. For alle $f \in L^2(-\pi,\pi)$ fås ved NY 4.15, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f,e_n)|^2 = \|f\|^2 < \infty$, hvorpå $((f,e_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

Vi har nu for $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, at

$$\begin{aligned} T(f) + \lambda T(g) &= (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} + \lambda(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(f) + \lambda c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= (c_n(f+\lambda g))_{n\in\mathbb{Z}} = T(f+\lambda g), \end{aligned}$$

idet $f \mapsto c_n(f)$ er lineær og vi benytter den sædvanlige komponentvise addition og skalarmultiplikation i $\ell_2(\mathbb{Z})$, hvorpå T er lineær.

Vi har endvidere, at

$$\|T(f)\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \|(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \|((f,e_n))_{n\in\mathbb{Z}}\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f,e_n)|^2 = \|f\|^2$$

for $f \in L^2(-\pi,\pi)$ jf. NY 4.15, thi $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis. Dermed er T også injektiv.

T er tilmed surjektiv. Lad nemlig en følge $(h_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ være givet. Betragt nu funktionen $\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m e_m$; denne konvergerer i $L_2(-\pi,\pi)$ jf. NY 4.11, da $(h_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Vi har nu for $n \in \mathbb{Z}$, at

$$\begin{aligned} c_n\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m e_m\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m e_m(t)\right) e^{-int}\mathrm{d}t \\ = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} h_m e^{imt} e^{-int}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\mathrm{d}t = h_n, \end{aligned}$$

thi integralet har værdien 0 for alle $m \in \mathbb{Z}$, så $n - m \neq 0$, dvs. så $n \neq m$ (se NY s. 48). I ovenstående udregninger bruger vi frit ombytning af sum og integral fra Målteori-kurset. Altså vil $T(\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m e_m) = (c_n(\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m e_m))_{n\in\mathbb{Z}} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Dermed gælder pr. NY 4.18, at T er unitær. □

Parsevals formler.

Da T er unitær, gælder ydermere jf. NY 4.17, at

$$(T(f), T(g))_{\ell_2(\mathbb{Z})} = (f,g)_{L^2(-\pi,\pi)}$$

i $\mathbb{C}$ for $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$. Da vi har i $\ell_2(\mathbb{Z})$ jf. NY s. 48, at det indre produkt $((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ er lig $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$, får vi nu for $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$, at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t &= (f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} = (T(f), T(g))_{\ell_2(\mathbb{Z})} \\ &= ((c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}, (c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}})_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}. \end{aligned}$$

Sættes $g = f$ i det ovenstående, fås for $f \in L^2(-\pi, \pi)$, at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Disse formler kaldes *Parsevals formler*.

Fourier-rækker og uniform konvergens.

Lad $f \in C^{2\pi} \cap C^1([-\pi, \pi])$. Dette f vil naturligvis ligge i $L^2(-\pi, \pi)$, da den er kontinuert.

Strategi: vi viser først sætningen (1) og uligheden (2). Uligheden giver, at den tilhørende følge konvergerer. Kan vi vise, at Fourier-rækken konvergerer uniformt (3), og at grænsefunktionen er lig f (4), er vi færdige.

(1) Relationen $c_n(f') = inc_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, gælder for Fourier-koefficienterne for f og f'.

Da f og f' er kontinuerte på $[-\pi, \pi]$, gælder, at $f, f' \in L^2(-\pi, \pi)$, hvormed vi kan opskrive Fourier-koefficienter c_n for disse. Vi får nu med partiel integration for $n \in \mathbb{Z}$, at

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}c_n(f') &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi} + in\sqrt{2\pi}c_n(f) = in\sqrt{2\pi}c_n(f),\end{aligned}$$

thi $f(\pi)e^{-in\pi} = f(-\pi)(-1)^n = f(-\pi)e^{in\pi}$; dermed det ønskede.

(2) Følgen (a_n), hvor $a_n = |n|^{-1}$ for $n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ og $a_0 = 1$ ligger i $\ell_2(\mathbb{Z})$, thi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = a_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Da vi endvidere har en unitær afbildning $L_2(-\pi, \pi) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ givet ved $g \mapsto (c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$, vil $(c_n(f'))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Da altså $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < \infty$, vil også $(|c_n(f')|)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, og derpå vil følgen (b_n), hvor $b_n = |c_n(f')|$ for $n \neq 0$ og $b_0 = |c_0(f)|$ også ligge i $\ell_2(\mathbb{Z})$. Vi har nu med det indre produkt og Cauchy-Schwarz i $\ell_2(\mathbb{Z})$, at

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = |c_0(f)| \cdot 1 + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{c_n(f')}{n}\right| \\ = \quad &((b_n), (a_n))_{\ell_2(\mathbb{Z})} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f')|^2}\sqrt{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \infty.\end{aligned}$$

Dvs. $(\sum_{n=-m}^{m} |c_n(f)|)$ konvergerer. Dvs. vi kan altså for ethvert $\varepsilon > 0$ finde N, så for $m \geq N$ vil $|\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| - \sum_{n=-m}^{m} |c_n(f)|| = \sum_{m+1\leq|n|} |c_n(f)| < \varepsilon$.

(3) Lad $\varepsilon > 0$. Da $|c_n(f)e^{int}| = |c_n(f)|$ for alle t, får vi altså, at der for alle $t \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int} - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)e^{int}\right| \leq \sum_{m+1\leq|n|} |c_n(f)| < \varepsilon,$$

når m er større end et vist N. Altså vil Fourier-rækken for f konvergere uniformt.

(4) Fourier-rækken konvergerer altså uniformt imod en grænsefunktion $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$. g må være kontinuert, da den er uniform grænse af en følge af kontinuerte funktioner. Vi ved tillige, at $f = g$ i $L_2(-\pi,\pi)$, altså at funktionerne er ens næsten overalt. Da både f og g er kontinuerte, må differensen $f - g$ også være kontinuert, men da denne er 0 næsten overalt, må den være 0 overalt. Altså er $f = g$.

Fourier-rækker og differentiabilitet.

Lad $\alpha < -1$, og lad p være det største naturlige tal mindre end $-(1+\alpha)$, hvis det eksisterer. Antag for $f \in L_2(-\pi,\pi)$, at der gælder $|c_n(f)| \leq |n|^\alpha$ for alle $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Hvis p er defineret, findes da en funktion i ækvivalensklassen i $L_2(-\pi,\pi)$ for f, som er $p-1$ gange kontinuert differentiabel.

Bevis. (1) Afledte af Fourier-udviklingen. Ved at differentiere den "m'te afsnitssum" af Fourier-udviklingen for f, får vi, at den k'te afledte af denne er $\sum_{n=-m}^{m} c_n(f)(in)^k e^{int}$ for $k \in \mathbb{N}$. Alle disse er selvfølgelig kontinuerte.

(2) For alle $k < -(1+\alpha)$ konvergerer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^k e^{int}$ uniformt. Lad $\varepsilon > 0$ og $k < -(1+\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$. Da vil gælde, at $\sum_{n\neq 0} |n|^{k+\alpha} < \infty$. Vi har nu, at rækken $\sum_{n=-m}^{m} c_n(f)(in)^k e^{int}$ konvergerer uniformt for $m \to \infty$, thi for alle $t \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^k e^{int} - \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)(in)^k e^{int}\right| &\leq \sum_{m+1\leq|n|} |c_n(f)||n|^k \\ &\leq \sum_{m+1\leq|n|} |n|^{k+\alpha} < \varepsilon,\end{aligned}$$

når m er større end et vist $N \in \mathbb{N}$.

(3) For alle $k < -(1+\alpha)$ er $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^{k-1} e^{int}$ differentiabel med kontinuert differentialkvotient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^k e^{int}$. For ovenstående k vil tillige gælde, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^{k-1} e^{ind}$ konvergerer for alle $d \in \mathbb{R}$. Vi har nemlig, at

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)(in)^{k-1} e^{ind}| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)||n|^{k-1} \leq |c_0(f)| + \sum_{n\neq 0} |n|^{\alpha+k-1} \\ &< |c_0(f)| + \sum_{n\neq 0} |n|^{-2} < \infty.\end{aligned}$$

Vi har altså, at $(\sum_{n=-m}^{m} c_n(f)(in)^{k-1} e^{int})$ konvergerer uniformt imod en differentiabel funktion for $1 \leq k < -(1+\alpha)$.[1] For alle samme k vil desuden gælde, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^{k-1} e^{int}$ har differentialkvotient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^k e^{int}$, da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^{k-1} e^{int} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)(in)^{k-1} e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^k e^{int}$$

[1] Hvis (f_n) er en følge af funktioner på $[a,b]$ og de afledte f_n' er kontinuerte og konvergerer uniformt, samt at $(f_n(d))$ konvergerer for mindst ét $d \in [a,b]$, vil (f_n) konvergere uniformt mod en differentiabel funktion f, og $lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$.

jf. sætningen. Dette giver altså, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(in)^{k-1}e^{int}$ er differentiabel med kontinuert differentialkvotient for $1 \leq k < -(1+\alpha)$.

(4) Konklusion. Altså vil $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ være $p-1$ gange kontinuert differentiabel. Altså findes en funktion i ækvivalensklassen til f i $L_2(-\pi,\pi)$, der er $p-1$ gange kontinuert differentiabel. Hvis f var antaget kontinuert, ville $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ overalt, hvorpå f ville være det. $\square$

Kapitel 5

Duale rum

Definitioner og sætninger.

Et *lineært funktional* på et vektorrum V over $\mathbb{L}$ er en afbildning $A : V \to \mathbb{L}$, som opfylder for alle $x, y \in V$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{L}$, at

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y).$$

Er A et lineært funktional på et vektorrum, er kontinuitet for dette ækvivalent med begrænsethed; altså, at $\sup_{\|x\| \leq 1} |A(x)| < \infty$ hvor $x \in V$. Eksisterer dette supremum, betegnes det $\|A\|$. Der gælder for alle $x \in V$, at $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$.

Mængden V^* af alle kontinuerte (eller begrænsede) lineære funktionaler på et normeret vektorrum V er et Banach rum med hensyn til punktvise operationer og ovennævnte funktionalnorm. V^* kaldes det *duale rum* til V.

Kerner og skalarer.

Hvis to lineære funktionaler f_1 og f_2 på et vektorrum V over legemet $\mathbb{L}$ opfylder, at $\ker f_1 \supseteq \ker f_2$, findes en skalar $\lambda \in \mathbb{L}$, så $f_1 = \lambda f_2$.

Bevis. Hvis $\ker f_1 = V$, er $f_1 = 0$, hvorpå $\lambda = 0$ giver det ønskede. Antag, at $\ker f_1 \neq V$. Nu vil findes $x_0 \in V$, så $f_1(x_0) \neq 0$, hvilket medfører $x_0 \notin \ker f_1$ og $x_0 \notin \ker f_2$, dvs. $f_2(x_0) \neq 0$. Lad $\mu \in \mathbb{L}$, så $\mu f_2(x_0) = f_2(\mu x_0) = 1$.

Lad nu $x \in V$ være givet. Da vil $f_2(x)$ være en skalar, hvilket giver

$$f_2(x - \mu x_0 f_2(x)) = f_2(x) - f_2(\mu x_0) f_2(x) = 0,$$

så $x - \mu x_0 f_2(x) \in \ker f_2 \subseteq \ker f_1$. Altså vil også $f_1(x - \mu x_0 f_2(x)) = 0$. Med linearitet får vi derpå, at $f_1(x) = \mu f_1(x_0) f_2(x) = \lambda f_2(x)$, hvor $\lambda = \mu f_1(x_0)$. □

Præ^2-Riesz-Fréchet.

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum og $y \in \mathcal{H}$ være givet. Da er funktionen $x \mapsto (x, y)$ et kontinuert lineært funktional på $\mathcal{H}$.

Bevis. At funktionen er et lineært funktional, er let at indse ved regneregler for det indre produkt. Kontinuiteten indses med Cauchy-Schwarz, idet

$$|(a, y) - (x, y)| = |(a - x, y)| \leq \|a - x\| \|y\| < \delta \|y\|,$$

hvorpå vi sætter $\delta = \varepsilon \|y\|^{-1}$. □

Præ-Riesz-Fréchet.

Lad $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ være et begrænset lineært funktional forskelligt fra 0 på Hilbert rummet $\mathcal{H}$. Da findes $y \neq 0$ i $(\ker f)^\perp$, og for alle sådanne y findes $\lambda \in \mathbb{C}$, så

$$f(x) = \lambda(x, y), \quad x \in \mathcal{H}.$$

Bevis. Da $\ker f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \in \{0\}\}$ er lukket, vil antagelsen $(\ker f)^\perp = \{0\}$ medføre, at $\ker f = \overline{\ker f} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$ (thi f er begrænset). Altså vil $f = 0$. Antagelsen, om at $f \neq 0$, vil altså medføre, at der findes $y \neq 0$ i $(\ker f)^\perp$.

Lad nu $y \neq 0$ i $(\ker f)^\perp$; da er $f(y) \neq 0$. Lad $\mu \in \mathbb{C}$, så $f(\mu y) = 1$, da $y \neq 0$; μ kan ikke være 0, thi $f(\mu x) = \mu f(x) = 1$. Sæt $z = \mu y$, hvorpå $z \neq 0$ og $z \in (\ker f)^\perp$, thi $(\ker f)^\perp$ er et underrum i $\mathcal{H}$. Lad nu $g(x) = (x, y)$ for alle $x \in \mathcal{H}$, og lad $a \in \ker g$. Da vil $(a, y) = 0$, og specielt vil

$$0 = \overline{\mu}(a, y) = (a, z) = (a - f(a)z, z) + (f(a)z, z) = f(a)\|z\|^2 = f(a)\mu^2\|y\|^2,$$

hvor vi bruger, at $f(a - f(a)z) = f(a) - f(a)f(z) = 0$. Da $y \neq 0$ og $\mu \neq 0$, må $f(a) = 0$, hvorpå $a \in \ker f$. Da $\ker g \subseteq \ker f$, gælder iflg. "Kerner og skalarer", at der findes $\lambda \in \mathbb{C}$, så $f(x) = \lambda(x, y)$ for alle $x \in \mathcal{H}$. □

Bedre bevis for Præ-Riesz-Fréchet.

Bevis. Der findes igen $y \neq 0$ i $(\ker f)^\perp$. Lad nu $y \neq 0$ i $(\ker f)^\perp$.

Lad $g : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ være givet ved $g(x) = (x, y)$; da er $g(a) = (a, y) = 0$ for alle $a \in \ker f$. Altså vil $\ker f \subseteq \ker g$, hvorpå foregående lemma giver, at der findes $\mu \in \mathbb{C}$, så $g = \mu f$. Antages $\mu = 0$, vil $g(x) = 0$ for alle $x \in \mathcal{H}$, hvorpå $y = 0$. Altså er $\mu \neq 0$, og vi får nu ved at sætte $\lambda = \mu^{-1}$, at $f = \lambda g$, som ønsket. □

Riesz-Fréchet.

Lad $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ være et kontinuert lineært funktional på Hilbert rummet $\mathcal{H}$. Der findes et entydigt $y \in \mathcal{H}$, så $f(x) = (x, y)$ for alle $x \in \mathcal{H}$. Endvidere er $\|y\| = \|f\|$.

Bevis. Et sådant y ville være entydigt, thi findes tillige et $y_0 \in \mathcal{H}$, så $f(x) = (x, y_0)$ for alle $x \in \mathcal{H}$, ville $(x, y_0) = (x, y)$ for alle $x \in \mathcal{H}$, hvorpå $y_0 = y$.

Er $f = 0$, er sætningen opfyldt med $y = 0$; antag derfor, at $f \neq 0$. Da er $\ker f \neq \mathcal{H}$; var $(\ker f)^\perp = \{0\}$, ville $\ker f = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$ (da $\ker f$ er afsluttet, idet f er kontinuert) – altså er $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$.

Der findes altså et $z \in (\ker f)^\perp$, så $z \neq 0$, og med ovenstående lemma findes altså $\lambda \in \mathbb{C}$, så $f(x) = \lambda(x, z)$ for alle $x \in \mathcal{H}$. Sættes $y = \overline{\lambda} z$, har vi det ønskede $y \in \mathcal{H}$.

Tilbage er kun at vise, at $\|y\| = \|f\|$.

Af Cauchy-Schwarz følger, at $|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$ for $\|x\| \leq 1$, hvorpå $\|f\| \leq \|y\|$. Da $y \neq 0$, er $\|y\|^{-1}y$ en enhedsvektor i $\mathcal{H}$, og $\|f\| \geq |f(\|y\|^{-1}y)| = \|y\|^{-1}|(y, y)| = \|y\|$, hvorpå $\|f\| = \|y\|$. □

Hahn-Banachs sætning.

Lad $\mathcal{M}$ være et lukket underrum i Hilbert rummet $\mathcal{H}$, og lad $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ være et kontinuert, lineært funktional over $\mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ selv er et Hilbert rum med det restringerede indre produkt på $\mathcal{H}$, har vi nu, at der findes $y \in \mathcal{M}$, så $f(x) = (x, y)$ for alle $x \in \mathcal{M}$ og $\|y\| = \|f\|$. Vi kan nu let definere $\tilde{f} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ til at være udvidelsen af f på $\mathcal{H}$, og dermed fås igen et kontinuert, lineært funktional, med norm

$$\|\tilde{f}\| = \sup\{|(x, y)| \,|\, x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} = \|y\| = \|f\|.$$

Dette indses af udregningerne foretaget i beviset for $\|y\| = \|f\|$ i Riesz-Fréchet.
Vi har dermed bevist Hahn-Banachs sætning for Hilbert rum.

Lineær isometrisk isomorfi.

$(c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$ kan identificeres med $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Mellem de to normerede rum er der en unitær afbildning $T : \ell_1 \to (c_0)^*$ givet ved $T(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, hvor $x = (x_n) \in c_0$ og $y = (y_n) \in \ell_1$.

Bevis. Påstanden vises i fire trin:

(1) *$T(y)$ er veldefineret på ℓ_1 og giver et begrænset, lineært funktional på c_0. Endvidere er $\|T(y)\| \leq \|y\|$.* Lad $y = (y_n) \in \ell_1$ og $c = (c_n) \in c_0$ være givet. Nu er

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n y_n| \leq \sum_{n=1}^\infty \sup_{k\in\mathbb{N}} |c_k||y_n| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |c_k| \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|c\|_\infty \|y\|_1 < \infty.$$

Lad i det følgende $y \in \ell_1$ være givet. Det eftervises let, at $T(y)(\lambda a + \mu b) = \lambda T(y)(a) + \mu T(y)(b)$ for $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ og $a, b \in c_0$; $T(y)$ er et lineært funktional på c_0. Begrænsetheden følger af følgende, ud fra ovenstående, idet vi lader $c \in c_0$:

$$|T(y)(c)| = \left|\sum_{n=1}^\infty c_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^\infty |c_n y_n| \leq \|c\|_\infty \|y\|_1 < \infty.$$

Lader vi endvidere $c \in c_0$ opfylde, at $\|c\|_\infty \leq 1$, er $|T(y)(c)| \leq \|y\|_1$, hvorpå vi har, at $\|T(y)\| \leq \|y\|$ som ønsket.

(2) *T er injektiv.* Som vi senere skal vise, gælder også, at $\|T(y)\| \geq \|y\|$, hvorpå antagelsen $T(y) = 0$ medfører $0 = \|T(y)\| = \|y\|$, så $y = 0$.

(3) *T er surjektiv.* Vi skal for ethvert $f \in (c_0)^*$ finde $y \in \ell_1$, så $T(y) = f$. Lad $f \in (c_0)^*$ være givet. Vi benytter nu følgen af følger i c_0, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor e_n er følgen med et 1-tal på den n'te plads og 0 ellers; alle disse ligger i c_0. Sæt $y_n = f(e_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og lad $y = (y_n)$. y ligger i ℓ_1:

For $n \in \mathbb{N}$ sættes $z_n = \overline{y_n}|y_n|^{-1}$ hvis $y_n \neq 0$, og $z_n = 1$, hvis $y_n = 0$. Da er $|z_n| = 1$ og $|z_n| = z_n y_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Lad nu $z = (z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots)$; det er klart, at $z \in c_0$, og $\|z\|_\infty = \sup |z_n| = 1$. Nu vil

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N |y_n| = \sum_{n=1}^N y_n z_n = \sum_{n=1}^N f(e_n) z_n = f\left(\sum_{n=1}^N e_n z_n\right) &\leq \|f\| \left\|\sum_{n=1}^N e_n z_n\right\|_\infty \\ &= \|f\| \|z\|_\infty = \|f\|,\end{aligned}$$

hvor vi bruger, at $\sum_{n=1}^{N} e_n z_n \in c_0$. Lader vi $N \to \infty$, fås, at $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leq \|f\| < \infty$, hvorpå $y \in \ell_1$.

Lad nu en følge $c = (c_n) \in c_0$ være givet. Da er $c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Da f er kontinuert, vil $f(c) = f(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n = T(y)(c)$. Dermed er $T(y) = f$, og T er surjektiv.

(4) $\|T(y)\| \geq \|y\|$ *for* $y \in \ell_1$. Lad $y \in \ell_1$. Vi definerer $z_n \in \mathbb{C}$ som i trin 3 (med 1 i stedet for 80), og definerer $z^N = (z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots)$. Af dette ses, at $z^N \in c_0$ og $\|z^N\|_\infty = 1$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Da får vi, at

$$\|T(y)\| = \sup_{x \in c_0, \|x\|_\infty \leq 1} |T(y)(x)| \geq |T(y)(z^N)| = \left| \sum_{n=1}^{N} y_n z_n \right| = \sum_{n=1}^{N} |y_n|.$$

Tages supremum over $N \in \mathbb{N}$ på begge sider, fås, at

$$\|T(y)\| \geq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|.$$

Dermed er $T : \ell_1 \to (c_0)^*$ lineær, bijektiv og isometrisk ($\|T(y)\| = \|y\|$), og altså unitær. □

Selvdualitet.

Et normeret rum kaldes *selvdualt*, hvis det er isomorft med sit duale rum. Hilbert rummet ℓ_2 er selvdualt, dvs. der findes en unitær afbildning mellem ℓ_2 og $(\ell_2)^*$.

Bevis. Vi definerer afbildningen $G : \ell_2 \to (\ell_2)^*$ ved $G(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, hvor $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$. For $x, y \in \ell_2$ ses med det indre produkt i ℓ_2, at $G(y)(x) = (x, \overline{y})$, hvor $\overline{y}$ er y med alle følgeelementer konjugerede. $G(y)$ ses let at være lineær som følge af dette, og ved Cauchy-Schwarz fås

$$|G(y)(x)| \leq \|x\| \|\overline{y}\| < \infty,$$

hvorpå $G(y) \in (\ell_2)^*$.

G er surjektiv, da ethvert funktional F på Hilbert rummet ℓ_2 ved Riesz-Fréchet er givet ved $F(x) = (x, y) = G(\overline{y})(x) = G(z)(x)$ for alle $x \in \ell_2$ med det indre produkt i ℓ_2, og $z = \overline{y}$. Altså er $F = G(z)$ for et entydigt bestemt $z \in \ell_2$ (konjugering er en isomorfi); alle $F \in (\ell_2)^*$ bliver ramt af et $z \in \ell_2$.

Tilbage er kun at vise, at G er en isometri. For $x, y \in \ell_2$ er $|G(y)(x)| = |(x, \overline{y})| \leq \|x\| \|y\|$ ved det indre produkt i ℓ_2. Specielt er $|G(y)(x)| \leq \|y\|$ for $\|x\| \leq 1$; altså er $\|G(y)\| \leq \|y\|$. Omvendt er $\|\overline{y}/\|y\|\| = 1$, så $\|G(y)\| \geq |G(y)(\overline{y}/\|y\|)| = |(\overline{y}/\|y\|, \overline{y})| = \|y\|$ med det indre produkt i ℓ_2, hvorpå $\|G(y)\| = \|y\|$; G er dermed injektiv. Altså er G en lineær, bijektiv isometri, og dermed unitær. □

Eksempler.

Vi definerer afbildningerne ϕ_1, ϕ_2 og ϕ_3 på Banach rummet $C[-\pi, \pi]$ med $\|\cdot\|_\infty$ ved

(1) $\phi_1 : f \mapsto f(\pi)$

(2) $\phi_2 : f \mapsto \int_{-\pi}^{0} f(s)\mathrm{d}s$
(3) $\phi_3 : f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \int_{1/n+1}^{1/n} f(s)\mathrm{d}s$.

Disse er alle tre begrænsede lineære funktionaler på $C[-\pi,\pi]$. ϕ_1 og ϕ_2 er klart lineære – dette indses ved sædvanlige punktvise operationer og regneregler for integraler. For alle $f \in C[-\pi,\pi]$ vil gælde, at

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{n} \int_{1/n+1}^{1/n} f(s)\mathrm{d}s \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/n+1}^{1/n} |\sqrt{n} f(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\|f\|_\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} < \infty,\end{aligned}$$

thi f er kontinuert, hvorpå $\|f\|_\infty < \infty$. Heraf ses, at rækken er absolut konvergent for alle $f \in C[-\pi,\pi]$, så funktionen er veldefineret, og med ovenstående fås klart linearitet ved almindelige regneregler for integraler og rækker. Af ovenstående følger også, at ϕ_3 er begrænset, thi

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \int_{1/n+1}^{1/n} f(s)\mathrm{d}s \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{n} \int_{1/n+1}^{1/n} f(s)\mathrm{d}s \right| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} < \infty$$

for alle $f \in C[-\pi,\pi]$.

Da vi har, at $|\phi_1(f) - \phi_1(g)| = |f(\pi) - g(\pi)| \leq \|f - g\|_\infty$ for $f, g \in C[-\pi,\pi]$, er ϕ_1 Lipschitz-kontinuert, og dermed også begrænset; da

$$|\phi_2(f) - \phi_2(g)| = \left| \int_{-\pi}^{0} f(s) - g(s)\mathrm{d}s \right| \leq \int_{-\pi}^{0} |f(s) - g(s)|\mathrm{d}s \leq \pi\|f - g\|_\infty$$

for $f, g \in C[-\pi,\pi]$, er også ϕ_2 Lipschitz-kontinuert og begrænset.

Samme eksempler.

Spørgsmålet er nu, om disse funktionaler kan udvides til også at være begrænsede funktionaler på $(L_2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Dette er i forbindelse med, at $C[-\pi,\pi]$ jo er et tæt underrum i $L_2(-\pi,\pi)$ med hensyn til $\|\cdot\|_2$. Her er altså kun normen til forskel, og det skal altså undersøges, om afbildningerne er funktionaler med hensyn til den nye norm.

(1) Da alle funktioner i $L_2(-\pi,\pi)$ er ækvivalensklasser af funktioner, giver $f(\pi)$ ikke mening for $f \in L_2(-\pi,\pi)$, da værdien kan være hvad som helst. Vi kan altså ikke engang afgøre, om ϕ_1 er et lineært funktional på $L_2(-\pi,\pi)$ – det kan vi kun med udvalgsaksiomet, hvilket vi dog ikke gør brug af her. Altså må vi sige nej til, at ϕ_1 også kan udvides til at være et begrænset funktional på $L_2(-\pi,\pi)$.

(2) ϕ_2 er lige så lineær som i $C[-\pi,\pi]$, og vi har med det indre produkt i $L^2(-\pi,\pi)$ for $f, g \in L_2(-\pi,\pi)$, at

$$\begin{aligned}|\phi_2(f) - \phi_2(g)| &= \left| \int_{-\pi}^{0} (f(s) - g(s))\mathrm{d}s \right| = |(f - g, 1_{[-\pi,0]})_2| \\ &\leq \|f - g\|_2 \|1_{[-\pi,0]}\|_2 = \sqrt{\pi}\|f - g\|_2,\end{aligned}$$

hvorpå ϕ_2 er Lipschitz-kontinuert, og dermed begrænset.

(3) ϕ_3 er lige så lineær som i $C[-\pi,\pi]$. Vi giver nu et modstridsbevis for, at ϕ_3 ikke er begrænset. Antag, at $\phi_3 \in (L_2(-\pi,\pi))^*$. Der findes ved Riesz-Fréchet et entydigt g i $L_2(-\pi,\pi)$, så $\phi_3(f) = (f,g)$ i $L_2(-\pi,\pi)$. Vi har endvidere for $f \in L_2(-\pi,\pi)$ med det indre produkt, at

$$\begin{aligned}(f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \int_{1/n+1}^{1/n} f(s)\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{[1/n+1,1/n]}(s) f(s)\mathrm{d}s \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{n} 1_{[1/n+1,1/n]}(s) f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

For alle $f \in L_2(-\pi,\pi)$ vil

$$\begin{aligned}(f, 1_{(-\pi,0]\cup(1,\pi)} g) &= \int_{-\pi}^{\pi} 1_{(-\pi,0]\cup(1,\pi)}(t) f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t = (1_{(-\pi,0]\cup(1,\pi)} f, g) \\ &= \phi_3(1_{(-\pi,0]\cup(1,\pi)} f) = 0,\end{aligned}$$

af hvilket vi kan konkludere, at $1_{(-\pi,0]\cup(1,\pi)} g = 0$ næsten overalt. Dermed vil $g = 0$ næsten overalt på $(-\pi,0] \cup (1,\pi)$.

Lad nu $m \in \mathbb{N}$ være givet. For alle $f \in L_2(-\pi,\pi)$ vil

$$\begin{aligned}(f, 1_{[1/m+1,1/m]} g) &= \int_{-\pi}^{\pi} 1_{[1/m+1,1/m]}(t) f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t = (1_{[1/m+1,1/m]} f, g) \\ &= \phi_3(1_{[1/m+1,1/m]} f) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{m} 1_{[1/m+1,1/m]}(s) f(s)\mathrm{d}s \\ &= (f, \sqrt{m} 1_{[1/m+1,1/m]}),\end{aligned}$$

af hvilket vi ser, at $1_{[1/m+1,1/m]} g = 1_{[1/m+1,1/m]} \sqrt{m}$ næsten overalt. Dermed vil $g = \sqrt{m}$ næsten overalt på $[1/m+1, 1/m]$.

Vi får dermed, at $g = 0 \cdot 1_{(-\pi,0]\cup(1,\pi)} + \sum_{m=1}^{\infty} 1_{[1/m+1,1/m]} \sqrt{m}$ n.o., thi vi har undersøgt, hvad g er på intervallerne $[1/m+1, 1/m]$ samt $(-\pi,0] \cup (1,\pi)$, som udgør hele $(-\pi,\pi)$. Altså er $g = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[1/n+1,1/n]} \sqrt{n}$ n.o.

Dette er imidlertid en modstrid, da $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 1_{[1/n+1,1/n]} \notin L_2(-\pi,\pi)$. Vi har nemlig, at

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 1_{[1/n+1,1/n]}(s) \right)^2 \mathrm{d}s &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} 1_{[1/n+1,1/n]}(s) \right)^2 \mathrm{d}s \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/n+1}^{1/n} n\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.\end{aligned}$$

Altså er ϕ_3 ikke begrænset.

Kapitel 6

Lineære operatorer

Lineær operator.

Lad E, F være vektorrum over et legeme k. En lineær operator er en afbildning $T : E \to F$, som opfylder

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$$

for alle $\lambda, \mu \in k$ og alle $x, y \in E$.

En lineær operator på E er en lineær operator fra E til E, altså en afbildning $T : E \to E$.

$\mathscr{L}(E, F)$.

Rummet $\mathscr{L}(E, F)$, hvor E, F er normerede rum, er rummet af alle kontinuerte lineære operatorer fra E til F.

Invertibilitet.

Lad $A \in \mathcal{L}(E, F)$, hvor E, F er normerede rum. A siges at være *invertibel*, hvis der eksisterer en afbildning $B \in \mathcal{L}(F, E)$, så $BA = 1_E$ og $AB = 1_F$.

Bemærk, at ovenstående er ækvivalent med, at $B \in \mathcal{L}(F, E)$ og B er bijektiv.

Spektrum.

Lad $A \in \mathcal{L}(E)$, hvor E er et Banach rum. Et spektrum $\sigma(A)$ af A er mængden af $\lambda \in \mathbb{C}$, så $\lambda I - A$ ikke er invertibel (hvor I er enhedsmatricen).

Lineære operatorer og kontinuitet.

Lad E,F være normerede rum og lad $T : E \to F$ være en lineær operator. Følgende udsagn er ækvivalente:

(i) T er kontinuert.

(ii) T er kontinuert i 0.

(iii) T er begrænset.

Bevis. Det er trivielt, at $(i) \Rightarrow (ii)$.

Antag nu, at (ii) gælder. Da findes et reelt $\delta > 0$, så $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx\|_F < 1$. For ethvert $x \in E$, så $\|x\|_E \leq 1$, gælder $\frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \frac{\delta}{2}\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|\frac{\delta}{2}x\|_E < \delta$, hvorfor $\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\|_F < 1$ og $\|Tx\| < \frac{2}{\delta} < \infty$ (hvilket følger af T's og normens homogenitet); så gælder (iii).

Antag nu, at (iii) gælder. Sæt $\sup\{\|Tx\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} = M$. For alle $x, y \in E$, hvor $x \neq y$, er $\|{}^{x-y}/_{\|x-y\|_E}\|_E = 1$, hvorfor

$$\left\|T\left(\frac{x-y}{\|x-y\|_E}\right)\right\|_F \leq M \Rightarrow \|Tx - Ty\|_F \leq M\|x-y\|_E,$$

hvor sidste implikation følger af T's linearitet. Da sidste ulighed også (trivielt) er opfyldt for alle $x, y \in E$, hvor $x = y$, er T Lipschitz-kontinuert med Lipschitz-konstant M. Derfor er T kontinuert, og (i) er opfyldt. □

Lineære operatorer på endeligdimensionale normerede rum er begrænsede.

Lad E være et endeligdimensionalt normeret rum over $\mathbb{C}$ og lad F være et normeret rum. Er $A : E \to F$ en lineær operator, er A begrænset.

Bevis. Ethvert endeligdimensionalt vektorrum har en ortonormalbasis; E er ingen undtagelse. Lad derfor n være dimensionen af E og lad $e_1, \ldots, e_n$ være en ortonormalbasis for E. Ethvert element x i E kan da opskrives på formen $x = \sum_{j=1}^n x_i e_i$, hvor $x_i \in \mathbb{C}$. Nu er

$$\|Ax\|_F = \left\|A\left(\sum_{j=1}^n x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_i A e_i\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_i| \|Ae_i\|_F = (x_B, A_B)_{\mathbb{C}^n},$$

hvor vi bruger trekantsuligheden for normer og til sidst definerer vektorerne $x_B = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ og $A_B = (\|Ae_1\|, \ldots, \|Ae_n\|)$ i Hilbert rummet $\mathbb{C}^n$ med det sædvanlige indre produkt (disse vektorer er faktisk reelle, hvorpå vi ikke konjugerer etcetera). Med Cauchy-Schwarz i $\mathbb{C}^n$ får vi nu, at

$$\|Ax\|_F \leq (x_B, A_B)_{\mathbb{C}^n} = \|x_B\|_{\mathbb{C}^n} \|A_B\|_{\mathbb{C}^n} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|^2\right)^{1/2}.$$

Vi definerer nu funktionen $\rho : E \to \mathbb{R}$ givet ved $\rho(\sum_{j=1}^n y_j e_j) = (\sum_{j=1}^n |y_j|^2)^{1/2}$. Vi har defineret ρ således, at billedet af hver vektor $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ er lig den euklidiske norm af den komplekse vektor $(y_1, \ldots, y_n)$.

Antages, at $y \neq 0$, må mindst ét af y_j'erne i $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ være forskellig fra 0, men da er $\rho(\sum_{j=1}^n y_j e_j) = (\sum_{j=1}^n |y_j|^2)^{1/2} > 0$ (N1). Der gælder tillige, at $\rho(\lambda \sum_{j=1}^n y_j e_j) = (\sum_{j=1}^n |\lambda y_j|^2)^{1/2} = |\lambda|(\sum_{j=1}^n |y_j|^2)^{1/2}$ (N2).

Antages, at $x, y \in E$, og at $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, vil

$$\rho(x+y) = \rho\left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j) e_j\right) = \|(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\|_2,$$

idet vi betragter ovenstående som den euklidiske norm af ovenstående vektor. Denne vektor er en sum af to vektorer $(x_1, \ldots, x_n)$ og $(y_1, \ldots, y_n)$, og trekantsuligheden ved den euklidiske norm giver, at

$$\|(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\|_2 \leq \|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 + \|(y_1, \ldots, y_n)\|_2 = \rho(x) + \rho(y).$$

Altså er ρ en norm på E. Da E er endeligdimensional, er alle normer på E ækvivalente jf. NY 2.13. Altså findes $K \geq 1$, så $\rho(y) \leq K\|y\|_E$ for alle $y \in E$. Vi har altså, at

$$\|Ax\|_F \leq \rho(x) \left(\sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|^2 \right)^{1/2} \leq K\|x\|_E \left(\sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|^2 \right)^{1/2},$$

hvormed A er begrænset. $\square$

Adjungerede operatorer.

Vi vil nu definere *adjungerede operatorer* og bevise, at sådanne eksisterer. Lad E, F være Hilbert rum. Lad $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Så eksisterer en entydig operator $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ sådan at $(Ax, y)_F = (x, A^*y)_E$ for alle $x \in E, y \in F$.

Bevis. Lad $y \in F$. Så gælder, at $x \longmapsto (Ax, y)_F$ er et kontinuert lineært funktional på E, da $x \longmapsto Ax$ er kontinuert og påstanden følger således af, at det indre produkt er kontinuert for fast $y \in F$.

Ved Riesz-Fréchet (NY 6.8) eksisterer et entydigt $z \in E$ så $(Ax, y)_F = (x, z)_E$ for alle $x \in E$. Skriv nu $z = A^*y$. Så gælder, at $A^* : F \longrightarrow E$ givet ved $(Ax, y)_F = (x, A^*y)_E$ er en veldefineret afbildning. Vi ønsker nu at vise, at A^* er lineær og begrænset.

Lad $y, z \in F$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. For alle $x \in E$ gælder:

$$\begin{aligned}
(x, A^*(y+z)) &\overset{def.}{=} (Ax, y+z) \\
&\overset{linearitet}{=} (Ax, y) + (Ax, z) \\
&= (x, A^*y) + (x, A^*z) \\
&= (x, A^*y + A^*z)
\end{aligned}$$

Dvs. $A^*(y+z) = A^*y + A^*z$ for alle $y, z \in F$; altså er A^* lineær. Lad nu $y \in F$. Så gælder:

$$\begin{aligned}
\|A^*y\|^2 &= (A^*y, A^*y) \\
&= (AA^*y, y) \\
&\overset{C.S.}{\leq} \|AA^*y\|\|y\|
\end{aligned}$$

Det ses, at $\|AA^*y\| \leq \|A\|\|A^*y\|$ ved NY 7.1. Derved gælder, at $\|A^*y\|^2 \leq \|A\|\|A^*y\|\|y\|$. Så gælder $\|A^*y\| \leq \|A\|\|y\|$. Dvs. A^* er begrænset og det følger, at $\|A^*\| \leq \|A\|$ da for $\|y\| \leq 1$ vil gælde, at $\|A^*y\| \leq \|A\|$. Herved fås, at $\sup_{\|y\| \leq 1} \|A^*y\| \leq \|A\|$.

Vi ønsker slutteligt at vise entydighed: Antag, at $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(F, E)$ opfylder $(Ax, y)_F = (x, B_1y)_E$ og $(Ax, y)_F = (x, B_2y)_E$. Så gælder

$(x, B_1 y)_E = (x, B_2 y)_E$ for alle $x \in E, y \in F$. Ved NY 1.5 gælder således, at $B_1 y = B_2 y$, og da dette skal gælde for alle $y \in F$, er således $B_1 = B_2$.

Vi bemærker, at før nævnte ulighed $\|A^*\| \leq \|A\|$ faktisk er en lighed. Dette følger af, at $(A^*)^* = A$ ved NY 7.15 og herved gælder ved netop viste: $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$. □

Den netop viste entydige begrænsede lineære operator, A^*, kaldes *den adjungerede* af A.

Sammenhæng med kerne, billede og adjungerede for lineær operator.

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum og $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Der gælder nu, at $\ker B = (\mathrm{ran} B^*)^\perp$ og at $(\ker B)^\perp = \mathrm{clos}(\mathrm{ran} B^*)$, hvor $\mathrm{ran} B = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists y \in \mathcal{H} : x = By\} = B(\mathcal{H})$.

Bevis. Lad $a \in \ker B$. Nu gælder følgende biimplikationer:

$$\begin{aligned} & a \in \ker B \\ \Leftrightarrow\quad & Ba = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (Ba, y) = 0 \,\forall\, y \in \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow\quad & (a, B^* y) = 0 \,\forall\, y \in \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow\quad & (a, x) = 0 \,\forall\, x \in \mathrm{ran} B^* \\ \Leftrightarrow\quad & a \in (\mathrm{ran} B^*)^\perp. \end{aligned}$$

Bemærk, at på anden linje er Ba lig nulvektoren i $\mathcal{H}$.

Slutteligt fås $(\ker B)^\perp = ((\mathrm{ran} B^*)^\perp)^\perp = \mathrm{clos}(\mathrm{ran} B^*)$. □

Spektrum og selvadjungerethed.

Lad $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ være selvadjungeret, altså $A^* = A$. Da gælder, at $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Bevis. Vi viser dette i 3 trin:

1. *En ulighed.* Lad $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, samt $x \in \mathcal{H}$. Da gælder, at

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\|^2 &= ((\lambda I - A)x, (\lambda I - A)x) \\ &= (\lambda I x - Ax, \lambda I x - Ax) \\ &= (\lambda x, \lambda x) - (Ax, \lambda I x) - (\lambda I x, Ax) + (Ax, Ax) \\ &= \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2 - (Ax, \lambda x) - (\lambda x, Ax) + (Ax, Ax) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)\|x\|^2 - (\alpha - i\beta)(x, A^* x) \\ &\qquad -(\alpha + i\beta)(x, Ax) + (Ax, Ax) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)\|x\|^2 - (\alpha - i\beta)(x, Ax) \\ &\qquad -(\alpha + i\beta)(x, Ax) + (Ax, Ax) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)\|x\|^2 - 2\alpha(x, Ax) + (Ax, Ax) \\ &= \beta^2\|x\|^2 + (\alpha x - Ax, \alpha x - Ax) \\ &\geq \beta^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Altså er $\|(\lambda I - A)x\| \geq |\beta|\|x\|$ for alle $x \in \mathcal{H}$.

2. *Injektiv med lukket billede for $\beta \neq 0$.* Lad nu $\lambda = \alpha + i\beta$ som før, hvor $\beta \neq 0$. Lad $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ og antag, at $(\lambda I - A)x = 0$. Da er

$$0 = \|(\lambda I - A)x\| \geq |\beta|\|x\| \geq 0.$$

Altså vil $\|x\| = 0$, da $\beta \neq 0$, og dermed $x = 0$. Da er $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$, og $\lambda I - A$ er injektiv.

Hvis (y_n) er en konvergent følge med punkter i $\operatorname{ran}(\lambda I - A)$, er (y_n) en Cauchy-følge, som er på formen $(\lambda I - A)x_n$, hvor (x_n) er en følge i $\mathcal{H}$. Der gælder her, at

$$\|x_n - x_m\| \leq |\beta|^{-1}\|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\| = |\beta|^{-1}\|y_n - y_m\|,$$

hvorpå (x_n) også ses at være en Cauchy-følge i Hilbert rummet $\mathcal{H}$, så denne konvergerer imod et punkt $x \in \mathcal{H}$. Da $\lambda I - A$ er kontinuert, vil $y_n = (\lambda I - A)x_n \to (\lambda I - A)x \in \operatorname{ran}(\lambda I - A)$, hvorpå $\operatorname{ran}(\lambda I - A)$ er lukket, for $\beta \neq 0$.

3. *$\lambda I - A$ er invertibel for $\beta \neq 0$.* Vi har nu med foregående lemma, at

$$\operatorname{ran}(\lambda I - A) = \operatorname{clos}(\operatorname{ran}(\lambda I - A)) = (\ker(\lambda I - A)^*)^{\perp} \overset{NY\,7.16}{=} \{0\}^{\perp} = \mathcal{H},$$

hvor andensidste lighedstegn gælder, idet $(\lambda I - A)^* = \overline{\lambda} I^* - A^* = \overline{\lambda} I - A$; da $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, vil $\overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, og med *(2)* får vi, at $\ker(\overline{\lambda} I - A) = \{0\}$. Altså vil $\lambda I - A$ være bijektiv, og det giver altså mening at definere en invers afbildning $(\lambda I - A)^{-1}$; denne er begrænset, da hvis vi lader $(\lambda I - A)x = y$, hvor $x, y \in \mathcal{H}$, vil

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\| = \|x\| \leq |\beta|^{-1}\|(\lambda I - A)x\| \leq |\beta|^{-1}\|y\|,$$

så $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq |\beta|^{-1}$. Altså vil gælde, at $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (da vi antog, at $\beta \neq 0$) medfører, at $\lambda I - A$ er invertibel, hvorpå $\lambda \notin \sigma(A)$. Kontraponering giver, at $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

$\square$