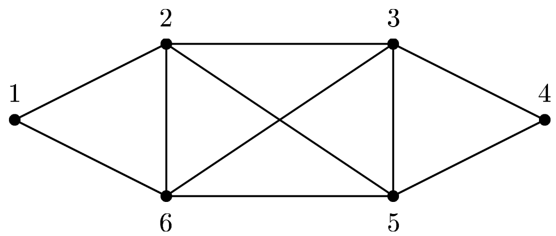
Dis1 2008-09
Ugeopgave 5

Rasmus Sylvester Bryder

13. marts 2009

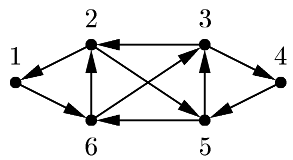
1 F08 opgave 3

Vi betragter grafen G:



Der skal bestemmes følgende:

a) *Om G har en lukket Euler-tur.* Betragt vandringen $1, 6, 3, 4, 5, 3, 2, 5, 6, 2, 1$:



Denne vandring er en tur, da alle 10 kanter i turen er indbyrdes forskellige, og er en lukket Euler-tur, da turen omfatter samtlige 10 kanter i G (vandringen er en tur med længde 10). Derfor har G en lukket Euler-tur, og G er da en Euler-graf.

b) *Om G har en ikke-lukket Euler-tur.* Alle knuder i G har lige valenser, da knuderne 1 og 4 har valens 2 og de resterende fire knuder valens 4. Der er altså ingen ulige valenser for nogen knuder i G, men KG sætning 6.3 siger jo, at en sammenhængende graf G har en ikke-lukket Euler-tur hvis og kun hvis præcis to knuder har ulige valens, og alle andre lige. Derpå har G ikke en ikke-lukket Euler-tur. *(Men vi ser, da alle valenser i G er lige, at der findes en lukket Euler-tur i G pr. sætning 6.2, som vi jo fandt.)*

c) *Om G har en Hamilton-kreds.* Betragt kredsen $1, 2, 3, 4, 5, 6$, som går igennem alle knuder i G og har længde 6 – denne er en kreds, da vandringen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ er en vej, og 1 og 6 er kantforbundne. Men denne er pr. definition en Hamilton-kreds.

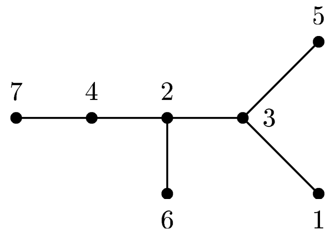
2 F08 opgave 5

Træet T med knudemængden $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og Prüfer-kode 33224 skal tegnes. Til dette benytter vi algoritmen i KG s. 66; denne konstruerer ved den givne Prüfer-kode en liste over de 6 kanter i T.

Taktikken er her at opskrive Prüfer-kode samt alle knuder i V. Man finder herpå det mindste element i knudelisten K og kobler det sammen med det første bogstav i restkoden R, hvorpå en kant i træet T er fundet. Derpå fjernes det brugte element i K, samt det første bogstav i R, og processen gentages indtil restkoden er tom, hvorpå de resterende elementer i K kobles sammen (i følgende tabel er de brugte elementer understreget). Vi opnår da følgende:

Restkode R	*Resterende knuder K*	*Kant*
$\underline{3}3224$	$\underline{1}$ 2 3 4 5 6 7	$\overline{13}$
$\underline{3}224$	2 3 4 $\underline{5}$ 6 7	$\overline{35}$
$\underline{2}24$	2 $\underline{3}$ 4 6 7	$\overline{23}$
$\underline{2}4$	2 4 $\underline{6}$ 7	$\overline{26}$
$\underline{4}$	$\underline{2}$ 4 7	$\overline{24}$
	$\underline{4}$ $\underline{7}$	$\overline{47}$

Ved disse kanter får vi da T som værende følgende træ:



3 KG opgave 6.13

Der skal vises, at en graf $G = (V, E)$, med $|V| \geq 3$, hvor der gælder for alle $u, v \in V$, som er forskellige og ikke-kantforbundne, at $\delta_u + \delta_v \geq |V|$, er sammenhængende og med alle knudevalenser større end eller lig 2.

Vi antager derfor, at vi har en graf G med ovenstående egenskaber. For at vise, at grafen G er sammenhængende, skal der vises, at to vilkårlige knuder $u, v \in V, u \neq v$ i G er vejforbundne. Hvis to vilkårlige knuder u og v er kantforbundne, er de også vejforbundne (det overlades til læseren at gennemskue hvorfor); det er derfor rimeligt at antage, at de ikke er kantforbundne. Derfor må der ifølge antagelsen gælde, at $\delta_u + \delta_v \geq |V|$.

En smart kategorisering af kanterne udgående fra u og v ved skuffeprincippet forestår nu; idet $V = \{u = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = v\}$, hvor $n = |V|$, laver vi $n-2$ skuffer ved at sætte den i'te skuffe, $i = 1, \ldots, n-2$, til at indeholde kanten uv_{i+1} og/eller $v_{i+1}v$, afhængigt af om den/de eksisterer – bemærk, at vi ikke laver nogen skuffe som kan indeholde uv, da vi jo antog, at $uv \notin E$. Vi ved, at $\delta_u + \delta_v \geq n$, dvs. der er mindst n kanter der udgår fra enten u eller v.

Vi kan nu anbringe disse mindst n kanter i de $n-2$ skuffer, og med skuffeprincippet får vi, at der er mindst to skuffer hvor der er to kanter - fokuserer vi på en af disse, skuffe j, må denne indeholde både kanten uv_{j+1} og $v_{j+1}v$. Sætter vi $w = v_{j+1}$, betyder det så, at $uw, wv \in E$, og dermed har vi fundet en vej fra u til v - nemlig u, w, v. Det betyder altså at to vilkårlige forskellige knuder u, v i G er vejforbundne, hvorpå grafen G er sammenhængende.

Da G er sammenhængende, er der følgelig ingen knuder med valens 0.

Vi påstår nu, at *der heller ikke er nogen knuder med valens 1*; antag til modstrid, at der findes $m \in V$, så $\delta_m = 1$. Under egenskaben for grafen G, at for alle $u, v \in V$, som er forskellige og ikke-kantforbundne, at $\delta_u + \delta_v \geq |V|$, vil der, da $|V| \geq 3$, være en knude $n \in V$, så $n \neq m$ og $mn \notin E$, derpå gælde, at $\delta_m + \delta_n \geq |V|$, dvs. $\delta_n \geq |V| - 1$. Dette vil nødvendigvis medføre, at n er forbundet til alle knuder i V, og deriblandt m; men vi valgte n, så $mn \notin E$, så der er altså en modstrid. Der er derfor ingen knuder med valens 1 i G.

Altså er den mindst mulige valens for alle knuder i G lig 2, og vi slutter at alle knudevalenser i G er ≥ 2, hvorpå det ønskede er vist. (Der vil nemlig ikke gælde for alle $|V|$, at alle valenser i G er præcis lig 2, da G så vil være en kredsgraf, hvorpå uligheden ikke vil holde for $|V| \geq 5$.)