Dis1 2008-09
Ugeopgave 6

Rasmus Sylvester Bryder

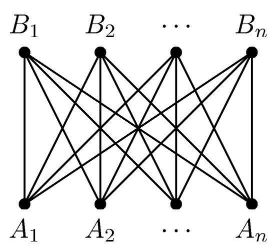
20. marts 2009

1 Supplerende opgave 1

I en håndboldturnering er $2(n+k)$ hold opdelt i to grupper A og B med $n+k$ hold i hver, hvor $n, k \in \mathbb{N}$. Alle spiller imod alle i de indledende runder. De n bedst placerede hold i hver gruppe går derpå videre til en mellemrunde, hvor alle hold igen spiller imod hinanden, undtagen dem der allerede har spillet imod hinanden i de indledende runder.

(i) Der skal opstilles en graf for "udseendet" af mellemrunden. Idet der er n hold hver fra gruppe A og B, virker det på sin plads at døbe de n gruppe A-hold $A_1, A_2, \ldots, A_n$, og samme for gruppe B. Idet vi skal skabe et forhold mellem disse hold i den graf vi forsøger at konstruere, vil det være naturligt, at knuderne $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ angiver de $2n$ hold der er havnet i mellemrunden og kanterne skal repræsentere de kampe der er i samme.

Idet vi altså har en gruppe/pulje A med holdene fra gruppe A, altså $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ og selvfølgelig også $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ og intet hold fra en given pulje må kæmpe imod et andet hold fra samme pulje (igen), er der altså ingen kanter mellem knuderne i mængden A og ditto med B. Da V i grafen $G = (V, E)$, som illustrerer mellemrunden, er givet ved $A \cup B$, får vi med ovenstående egenskab følgende billede af G:



som vi straks genkender som den komplet-bipartite graf $K_{n,n}$.

(ii) Mellemrunden skal selvfølgelig afvikles over et vist antal dage, og det samme hold må ikke spille to gange samme dag. Skal man tilrettelægge turneringen optimalt, skal man afsætte et færrest muligt antal dage til denne, og da disse afhænger af kampene som er givet ved kanterne i G, skal vi derfor finde det mindst mulige antal farver/dage, så G kan farves/opstilles så ingen kanter som udgår fra en knude i G har samme farve (idet en farve angiver en bestemt dag); med andre ord, finde $\chi'(G)$.

Men vi fandt jo at G var bipartit, og ved Königs sætning får vi, at $\chi'(G) = \Delta(G) = n$, da hvert hold spiller imod de n hold fra den anden pulje (hver knude har valens n). Altså skal man afsætte n dage til mellemrunden. Om noget hold har en fridag i løbet af turneringen, afhænger selvfølgelig af om man vil arrangere det sådan, men det er ladsiggørligt at afsætte turneringen på n på hinanden følgende dage, således at ingen hold har en fridag, da alle hold skal spille n gange hver. (Hvis der kun er én bane, er antallet af dage n^2.)

2 F08 opgave 6

Vi betragter grafen G i opgaveformuleringen.

(i) Der skal gøres rede for at $G = (V, E)$ er bipartit. Vi vil derfor kigge på de mange kredse der er at finde i G; idet vi ser, at G har en "yderkreds" og en "inderkreds", kan vi se at hvis vi vælger en vilkårlig knude i V og vil gå en kreds ud fra denne, kan vi enten gå en distance $d \geq 1$ frem og så samme distance tilbage d efter at have skiftet til inder- eller yderkreds (hvorpå vores kreds har længde $2d + 2$, som er lige), eller kan gå hele vejen rundt i en af to omløbsretninger, hvorpå vi kun må skifte kreds et lige antal gange, da vi ellers ikke kan havne i samme knude som vi startede (hvorpå den følgende kreds har længde 6 plus et lige tal, altså et lige tal). Derpå er alle kredse i G lige, og pr. KG sætning s. 54 er G da bipartit.

Simplere kunne vi definere $V_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ og $V_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (ser slet ikke aftalt ud), bemærke, at alle knuder i V_1 kun er forbundet til knuder i V_2 og omvendt, samt at V_1 og V_2 er disjunkte og udgør hele V, hvorpå G er bipartit. (Denne metode er vel nemmest til eksamen(?).)

(ii) Da alle knuder i G har valens 3, er $\Delta(G) = 3$, og da G er bipartit, gælder ved Königs sætning, at $\chi'(G) = 3$. Se bilag for en egentlig kantfarvning af G.

(iii) Graderne af sammenhæng for G skal bestemmes. Vi har, da alle knuder har valens 3, at $\delta(G) = 3$.

Dette er ikke umiddelbart indlysende, hvad $\kappa(G)$ er. Vælger vi en vilkårlig knude u i G, vil vi nu forsøge at isolere denne. Da der er lige kredse i G, ved vi, at $\kappa(G) \geq 2$, men vi kan ikke nøjes med at fjerne 2 knuder som er kantforbundne med u, da der stadig derpå vil være en vej fra u til en af de resterende knuder — 3 knuder er nødvendigt, idet vi fjerner alle knuder som u er kantforbunden med. Derpå har vi at $\kappa(G) = 3$. Pr. KG sætning s. 127, gælder så at $\kappa'(G) = 3$.

(iv) Da $\kappa'(G) = 3$, skal en minimal snitmængde $S \subseteq E$ for G have 3 elementer, fx $S = \{\overline{12}, \overline{18}, \overline{16}\}$.

(v) Da $\kappa(G) = 3$, skal en minimal adskillende mængde $F \subseteq V$ af knuder for G have 3 elementer, fx mængden $F = \{2, 6, 8\}$. Herpå er knuden 1 isoleret.