Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet april 2006

Geometri 1

Skriftlig eksamen, 3 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Opgaverne vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

English translation on pages 3-4

Opgave 1 (tæller 30 %)
Lad $f(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a. Bestem mængden af kritiske punkter for f.

b. Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$, og lad $P = (0, 0, 0)$. Bestem en åben omegn W af P i $\mathbb{R}^3$ og en glat funktion h af to variable, således at $\mathcal{S} \cap W$ kan parametriseres som en graf for h.

c. Bestem tangentrummet til den ovennævnte graf i det punkt, der har billedet P.

d. Vis, at vindelfladen

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

er bijektiv $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$.

Opgave 2 (tæller 30 %)
Betragt den parametriserede flade

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \cos 2v),$$

hvor $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

a. Udregn σ'_u, σ'_v samt $\sigma'_u \times \sigma'_v$.

b. Bestem mængden $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \text{ er regulær i } (u, v)\}$.

c. Bestem koefficienterne E, F og G af den første fundamentalform for σ i samtlige punkter $p \in U$.

d. Bestem koefficienterne L, M og N af den anden fundamentalform for σ i punktet $p = (0, \frac{\pi}{4})$. Bestem endvidere i det samme punkt de to hovedkrumninger κ_1 og κ_2 samt et tilhørende sæt af normerede hovedkrumningsvektorer.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (tæller 20 %)

Lad $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ være en parametriseret glat kurve med enhedsfart. Antag der findes en fast vektor $q \in \mathbb{R}^3$ således at $\gamma''(s) = q$ for alle $s \in I$. Vis, at γ er en ret linie.

Giv dernæst et eksempel der viser, at konklusionen ville være falsk uden antagelsen om enhedsfart.

Opgave 4 (tæller 20 %)

Lad der være givet to flader $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ og $\rho\colon V \to \mathbb{R}^3$, som begge er graf for funktionen $h(u,v) = u \tan v$, men med forskellige definitionsområder, henholdsvis $U = \mathbb{R}\times]0, \frac{\pi}{2}[$ og $V = \mathbb{R}\times]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Vis, at afbildningen $\psi\colon U \to V$ givet ved $\psi(u,v) = (-u \tan v, v + \frac{\pi}{2})$ er en isometri fra σ til ρ, og afgør, om den bevarer eller vender orientering.

Ved besvarelse af denne opgave kan man eventuelt benytte formlerne

$$\tan(t + \frac{\pi}{2}) = \tan(t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan t}.$$

SLUT. Den engelske tekst følger på side 3

ENGLISH TRANSLATION

Written exam, 3 hours. All course material is allowed during the exam. The problems are weighted approximately as indicated. Answers written in pencil are accepted if the writing is legible and erasings are careful. Deletion is recommended for larger changes, instead of erasing.

Exercise 1 (counts 30 %)

Let $f(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a. Determine the set of critical points for f.

b. Let $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$, and let $P = (0, 0, 0)$. Determine an open neighborhood W of P in $\mathbb{R}^3$ and a smooth function h of two variables, such that $\mathcal{S} \cap W$ can be parametrised as a graph for h.

c. Determine the tangent space of the above mentioned graph in the point, whose image is P.

d. Show that the helicoid

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

is bijective $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$.

Exercise 2 (counts 30 %)

Consider the parametrised surface

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \cos 2v),$$

where $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

a. Compute σ'_u, σ'_v and $\sigma'_u \times \sigma'_v$.

b. Determine the set $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \text{ is regular in } (u, v)\}$.

c. Determine the coefficients E, F and G of the first fundamental form for σ in all points $p \in U$.

d. Determine the coefficients L, M og N of the second fundamental form for σ in the point $p = (0, \frac{\pi}{4})$. Determine in the same point the two principal curvatures κ_1 and κ_2 together with an associated set of normed principal vectors.

Continuation on page 4

Exercise 3 (counts 20 %)

Let $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ be a parametrised smooth curve with unit speed. Assume that there exists a fixed vector $q \in \mathbb{R}^3$ such that $\gamma''(s) = q$ for all $s \in I$. Show that γ is a straight line.

Give also an example which shows that the conclusion would be false without the assumption of unit speed.

Exercise 4 (counts 20 %)

Let two surfaces $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ and $\rho\colon V \to \mathbb{R}^3$ be given, which are both graphs of the function $h(u, v) = u \tan v$, but with different domains of definition, respectively $U = \mathbb{R}\times]0, \frac{\pi}{2}[$ and $V = \mathbb{R}\times]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Show that the map $\psi\colon U \to V$ given by $\psi(u, v) = (-u \tan v, v + \frac{\pi}{2})$ is an isometry from σ to ρ, and determine whether it preserves or reverses orientation.

The following formulas may be useful for the solution to this exercise

$$\tan(t + \frac{\pi}{2}) = \tan(t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan t}.$$

END