Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet april 2008

Geometri 1

Skriftlig eksamen, 3 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Opgaverne vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

English translation on page 2

I alle fem opgaver betegnes

$$\sigma(u,v) = (u, u+v, (u+v)^2)$$

for $(u,v) \in U = \mathbb{R}^2$. Opgaverne 2, 3, 4 og 5 kan i øvrigt løses uafhængigt af hinanden.

Opgave 1 (tæller 12 %). Verificer at σ er en injektiv, regulær parametriseret flade og at koefficienterne af den første fundamentalform er

$$E = 2 + 4(u+v)^2, \quad F = G = 1 + 4(u+v)^2.$$

Opgave 2 (tæller 22 %)

a. Vis, at vektoren $(2,1,0)$ tilhører tangentrummet $T_{(0,0)}\sigma$ og angiv en kurve $\gamma(t) = \sigma(\mu(t))$ på σ, for hvilken $\gamma(0) = (0,0,0)$ og $\gamma'(0) = (2,1,0)$.

b. Lad $w = (1,0,2)$. Vis, at mængden $A = \{p \in U \mid w \in T_p\sigma\}$ er tom.

Opgave 3 (tæller 22 %)

Lad $\gamma(t) = (0, t, t^2)$ for $t \in \mathbb{R}$.

a. Bestem krumningen $\kappa(t)$ og torsionen $\tau(t)$ for γ.

b. Bestem endvidere normalkrumningen $\kappa_n(t)$ samt den geodætiske krumning $\kappa_g(t)$, idet γ skal opfattes som en kurve på σ.

Opgave 4 (tæller 22 %)

a. Bestem hovedkrumningerne κ_1 og κ_2 samt Gauss krumningen K, for σ i $p = (0,0)$.

b. Bestem en enhedsvektor $w \in T_{(0,0)}\sigma$, for hvilken normalkrumningen af σ i $p = (0,0)$ med retning w er $\kappa_n = 1$.

Opgave 5 (tæller 22 %)

Lad $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være grafen $\rho(x,y) = (x, y, h(x,y))$ for funktionen $h(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2$. Lad endvidere $\psi(u,v) = (\sqrt{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{\sqrt{2}}{2}v)$ for $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

a. Gør rede for, at $\rho \circ \psi$ er en orienteringsbevarende omparametrisering af ρ.

b. Vis, at ψ er en isometri fra σ til ρ. Hvad kan konkluderes om Gauss krumningerne $K_\sigma(u,v)$ og $K_\rho(x,y)$ for de to flader?

28. marts 2008/HS

SLUT. Den engelske tekst følger på side 2

ENGLISH TRANSLATION

Written exam, 3 hours. All course material is allowed during the exam. The problems are weighted approximately as indicated. Answers written in pencil are accepted if the writing is legible and erasings are careful. Deletion is recommended for larger changes, instead of erasing.

In all five exercises, let

$$\sigma(u, v) = (u, u + v, (u + v)^2)$$

for $(u, v) \in U = \mathbb{R}^2$. The exercises 2, 3, 4 og 5 can be solved independently of each other.

Exercise 1 (counts 12 %)

Let $\sigma(u, v) = (u, u+v, (u+v)^2)$ for $(u, v) \in U = \mathbb{R}^2$. Verify that σ is an injective, regular parametrised surface, and that the coefficients of the first fundamental form are

$$E = 2 + 4(u + v)^2, \quad F = G = 1 + 4(u + v)^2.$$

Exercise 2 (counts 22 %)

a. Show that the vector $(2, 1, 0)$ belongs to the tangent space $T_{(0,0)}\sigma$, and find a curve $\gamma(t) = \sigma(\mu(t))$ on σ, for which $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ and $\gamma'(0) = (2, 1, 0)$.

b. Let $w = (1, 0, 2)$. Prove that the set $A = \{p \in U \mid w \in T_p\sigma\}$ is empty.

Exercise 3 (counts 22 %)

Let $\gamma(t) = (0, t, t^2)$ for $t \in \mathbb{R}$.

a. Determine the curvature $\kappa(t)$ and the torsion $\tau(t)$ for γ.

b. Determine also the normal curvature $\kappa_n(t)$ and the geodesic curvature $\kappa_g(t)$, when γ is seen as a curve on σ.

Exercise 4 (counts 22 %)

a. Determine the principal curvatures κ_1 and κ_2 for σ at $p = (0, 0)$.

b. Determine a unit vector $w \in T_{(0,0)}\sigma$, such that the normal curvature for σ at $p = (0, 0)$ with direction w is $\kappa_n = 1$.

Exercise 5 (counts 22 %)

Let $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be the graph $\rho(x, y) = (x, y, h(x, y))$ of the function $h(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2$. Furthermore, let $\psi(u, v) = (\sqrt{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{\sqrt{2}}{2}v)$ for $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

a. Verify that $\rho \circ \psi$ is an orientation preserving reparametrization of ρ.

b. Show that ψ is an isometry from σ to ρ. What can you conclude about the Gauss curvatures $K_\sigma(u, v)$ og $K_\rho(x, y)$ for the two surfaces?

END