Geom1
Obligatorisk opgave 1

Rasmus Sylvester Bryder

26. april 2010

Written exercise 1.1

Betragt mængden $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ af løsninger til ligningen $16z - 3y^2 + 2xy + x^2 = 0$.

a)

Hvad skal et punkt $p = (x, y, z)$ opfylde, for at Sætning 1.6 kan anvendes til at vise eksistensen af en omegn af p, i hvilken $\mathcal{S}$ kan parametriseres som en graf på formen $x = h(y, z)$ for en glat funktion h af to variable?

Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x, y, z) = 16z - 3y^2 + 2xy + x^2$, hvorpå $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x, y, z) = 0\}$. Sætning 1.6 kræver af $p \in \mathcal{S}$, at $\partial f/\partial x(p) \neq 0$. Da $\partial f/\partial x(x, y, z) = 2y + 2x$, kræves altså, at $y \neq -x$.

Er dette opfyldt, giver Sætning 1.6, at der findes åbne intervaller $I \subseteq \mathbb{R}^2$ og $J \subseteq \mathbb{R}$, samt en glat funktion $h : I \to J$, så $\mathcal{S} \cap U = \{(y, z, h(y, z)) \,|\, (y, z) \in I\}$, hvor $U = I \times J$.

b)

Lad $W = \{(x, y, z) \,|\, x + y > 0\}$. Forklar, hvorfor W er åben, og bestem en glat funktion h, hvis graf parametriserer $\mathcal{S} \cap W$ på formen $x = h(y, z)$.

Lad $a = (a_1, a_2, a_3) \in W$. Lad nu $w = (w_1, w_2, w_3) \in K(a, \frac{1}{2}(a_1 + a_2))$. Da vil $|a_i - w_i| \leq \|a - w\| < \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $i = 1, 2, 3$, så

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - (w_1 + w_2) &\leq |a_1 + a_2 - (w_1 + w_2)| \leq |a_1 - w_1| + |a_2 - w_2| \\ &< \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = a_1 + a_2, \end{aligned}$$

så $w_1 + w_2 > 0$, hvorpå $w \in W$. Altså er W åben. Vi har, at

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \cap W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 16z - 3y^2 + 2xy + x^2 = 0,\ x + y > 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x + y)^2 = 4y^2 - 16z,\ x + y > 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = \pm\sqrt{4y^2 - 16z},\ x + y > 0,\ 4y^2 - 16z > 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \sqrt{4y^2 - 16z} - y,\ 4y^2 - 16z > 0\}, \end{aligned}$$

så ved at definere $h : \Omega \to \mathbb{R}$ ved $h(y,z) = \sqrt{4y^2 - 16z} - y$, hvor vi dertil definerer $\Omega = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 4y^2 - 16z > 0\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 16z - 4y^2 < 0\}$ – som er åben jf. A.5, da $(y,z) \mapsto 16z - 4y^2$ er kontinuert – ser vi, at grafen for h netop parametriserer $\mathcal{S} \cap W$ ved $x = h(y,z)$. Bemærk, at det er ladsiggørligt jf. delopgave a), idet $y > -x$ i W.

c)

Vis, at $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u,v) = (u - 3v, u + v, uv)$ er en injektiv parametriseret flade med billedmængde $\mathcal{S}$.

Under antagelse, at $\sigma(u_1, v_1) = \sigma(u_2, v_2)$, fås, at $u_1 - 3v_1 = u_2 - 3v_2$ og $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$; trækkes disse fra hinanden, fås, at $-4v_1 = -4v_2$, hvorpå $v_1 = v_2$, således, at $u_1 = u_2$. Altså er σ injektiv. Det er klart, at funktionerne $(u,v) \mapsto u - 3v$, $(u,v) \mapsto u + v$ og $(u,v) \mapsto uv$ har kontinuerte partielle afledte for alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, det er klart, at de er C^∞, thi de partielle afledte af anden orden alle er nulfunktionen. Altså er σ en parametriseret flade.

Vi har for alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, at

$$\begin{aligned} & 16uv - 3(u+v)^2 + 2(u-3v)(u+v) + (u-3v)^2 \\ = \; & 16uv - (3u^2 + 6uv + 3v^2) + (2u^2 - 4uv - 6v^2) + (u^2 - 6uv + 9v^2) = 0. \end{aligned}$$

Altså vil $\sigma(u,v) \in \mathcal{S}$. Omvendt medfører $(x,y,z) \in \mathcal{S}$, at $16z - 3y^2 + 2xy + x^2 = 0$. Lad da $u = \frac{3y+x}{4}$ og $v = \frac{y-x}{4}$; da vil

$$\begin{aligned} \sigma(u,v) &= \left(\frac{3y + x - 3y + 3x}{4}, \frac{3y + x + y - x}{4}, \frac{(3y+x)(y-x)}{16} \right) \\ &= \left(x, y, \frac{3y^2 - x^2 - 2xy}{16} \right) = (x,y,z), \end{aligned}$$

da (x,y,z) opfylder ligningen ovenfor. Alle $p \in \mathcal{S}$ bliver altså ramt af σ, og altså har σ billedmængden $\mathcal{S}$.

Written exercise 1.2 (opgave 4, side 16)

Vi betragter ligningen $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$ i $\mathbb{R}^2$, hvor $a > 0$ er en konstant, og lad $\mathcal{H}$ være mængden af løsninger til denne. Lad nu $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$\gamma(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right).$$

Vi skal vise, at γ er en bijektion mellem $\mathbb{R}$ og $\mathcal{H}$. γ er injektiv, thi lader vi $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, vil vi, hvis $t_0 \neq 0$ og $t_1 \neq 0$ ved division af ligningen mellem andenkoordinaterne med ligningen mellem førstekoordinaterne få, at $2at_0 = 2at_1$, hvorpå $t_0 = t_1$. Hvis enten $t_0 = 0$ eller $t_1 = 0$, vil den anden automatisk også være 0.

Lader vi $t \in \mathbb{R}$, vil

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2at^2}{1+t^2}\right)^3 + \left(\frac{2at^2}{1+t^2} - 2a\right)\left(\frac{2at^3}{1+t^2}\right)^2 \\
= &\left(\frac{2at^2}{1+t^2}\right)^3 + \left(\frac{2at^2 - 2a(1+t^2)}{1+t^2}\right)\left(\frac{2at^3}{1+t^2}\right)^2 \\
= &\frac{8a^3t^6 + 4a^2t^6(-2a)}{(1+t^2)^3} = 0.
\end{aligned}$$

Altså vil $\gamma(t) \in \mathcal{H}$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Hvis $(x, y) \in \mathcal{H}$, vil gælde, at hvis $x \neq 0$ er

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\frac{y}{x}\right) &= \left(\frac{2ay^2}{x^2(1+(\frac{y}{x})^2)}, \frac{2ay^3}{x^3(1+(\frac{y}{x})^2)}\right) = \left(\frac{2ay^2}{x^2+y^2}, \frac{2ay^3}{x^3+xy^2}\right) \\
&= \left(\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}, \frac{y(x^3+xy^2)}{x^3+xy^2}\right) = (x, y);
\end{aligned}$$

hvis $x = 0$, vil $y = 0$, og vi har dertil, at $\gamma(0) = (0, 0)$. Altså bliver alle punkter i $\mathcal{H}$ ramt af et $t \in \mathbb{R}$. Dermed er $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ en bijektion. Slutteligt tegner vi γ:

```
with(plots); implicitplot(x^3+x*y^2-2*y^2 = 0, x = 0 .. 2, y =
        -10 .. 10, gridrefine = 5);
```