Geom1
Obligatorisk opgave 2

Rasmus Sylvester Bryder

3. maj 2010

Exercise 13, side 36

Lad $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u > v\}$ og $\sigma(u,v) = (\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u^2+v^2), uv)$ for $(u,v) \in U$. Lad $p = (2,0)$.

a.

Vi skal vise, at σ er regulær i p, og bestemme $T_p\sigma$. Vi ser først, at $p \in U$, og at σ er glat, thi dens komponentfunktioner er glatte; vi finder dertil Jacobi-matricen for σ og for σ i p:

$$D\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u & v \\ v & u \end{pmatrix} \text{ og } D\sigma(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser let, at søjlerne i $D\sigma(p)$ er lineært uafhængige, thi det eneste tal vi kan gange 2 med for at få 0, er 0, hvorpå en af søjlerne skulle have været nulvektoren. Altså er σ regulær i p. Endvidere har vi, at $T_p\sigma$ er underrummet i $\mathbb{R}^3$ udspændt af søjlerne i $D\sigma(p)$:

$$T_p\sigma = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

b.

Lad $W = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, s^2 > t\}$ og definér $\phi : W \to \mathbb{R}^2$ ved

$$\phi(s,t) = (s + \sqrt{s^2 - t}, s - \sqrt{s^2 - t}).$$

Vi skal vise, at ϕ er en diffeomorfi fra W til U. Det følger af opgave A.5, at U og W er åbne i $\mathbb{R}^3$. Vi har for alle $s, t \in W$, at

$$s + \sqrt{s^2 - t} > s + \sqrt{s^2 - t} - 2\sqrt{s^2 - t} = s - \sqrt{s^2 - t},$$

thi $s^2 > t$. Altså vil $\phi(s,t) \in U$ for alle $s, t \in W$, så ϕ er en afbildning fra W til U. Vi har desuden, at ϕ er glat, thi dens komponentfunktioner er glatte.

Det ses let, at ϕ er injektiv. Lades $\phi(s,t) = \phi(s_0,t_0)$ for to tupler $(s,t), (s_0,t_0)$ i W, vil vi ved at lægge andenkoordinaterne hver især til førstekoordinaterne få, at $2s = 2s_0$, og altså $s = s_0$. Nu vil $s + \sqrt{s^2 - t} = s + \sqrt{s^2 - t_0}$, så ved at trække s fra og opløfte i anden potens, fås, at $t = t_0$. Altså er ϕ injektiv.

Lad nu $(u,v) \in U$. Betragt ligningerne $s + \sqrt{s^2 - t} = u$ og $s - \sqrt{s^2 - t} = v$. Ved at lægge ligningerne sammen, fås $2s = u+v$, så $s = \frac{1}{2}(u+v)$. Ved at trække dem fra hinanden, fås $2\sqrt{s^2 - t} = u - v$, så $s^2 - t = \frac{1}{4}(u-v)^2$, hvorpå

$$t = \left(\frac{1}{2}(u+v)\right)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2 = \frac{1}{4}(u^2 + v^2 + 2uv - u^2 - v^2 + 2uv) = uv,$$

thi $s = \frac{1}{2}(u+v)$. Vi har endvidere, at

$$s^2 = \frac{1}{4}(u+v)^2 = \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}uv = uv + \frac{1}{4}(u-v)^2 > uv = t.$$

Altså vil $(s,t) \in W$, og vi får, at

$$\begin{aligned}
\phi(s,t) &= \phi(\tfrac{1}{2}(u+v), uv) \\
&= (\tfrac{1}{2}(u+v) + \sqrt{(\tfrac{1}{2}(u+v))^2 - uv}, \tfrac{1}{2}(u+v) - \sqrt{(\tfrac{1}{2}(u+v))^2 - uv}) \\
&= (\tfrac{1}{2}(u+v) + \sqrt{(\tfrac{1}{2}(u-v))^2}, \tfrac{1}{2}(u+v) - \sqrt{(\tfrac{1}{2}(u-v))^2}) \\
&= (\tfrac{1}{2}(u+v) + \tfrac{1}{2}(u-v), \tfrac{1}{2}(u+v) - \tfrac{1}{2}(u-v)) = (u,v),
\end{aligned}$$

thi $\frac{1}{2}(u-v))^2 \geq 0$. Dermed er $\phi : W \to U$ surjektiv og dermed bijektiv med den inverse $\phi^{-1} : U \to W$ givet ved $\phi^{-1}(u,v) = (\frac{1}{2}(u+v), uv)$. Denne ses klart at være glat, hvorpå $\phi : W \to U$ er glat, bijektiv og har en glat invers og derpå er en diffeomorfi.

Vi finder determinanten af ϕ for $(s,t) \in W$:

$$\begin{aligned}
\det(D\phi(s,t)) &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{\sqrt{s^2-t}} & -\frac{1}{2\sqrt{s^2-t}} \\ 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2-t}} & \frac{1}{2\sqrt{s^2-t}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{s^2-t}} + \frac{s}{2(s^2-t)} + \left(\frac{1}{2\sqrt{s^2-t}} - \frac{s}{2(s^2-t)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2-t}} > 0,
\end{aligned}$$

hvorpå vi ser, at ϕ er orienteringsbevarende.

c.

Definition 2.6.2 giver, at $\tau = \sigma \circ \phi : W \to \mathbb{R}^3$ er en reparametrisering af σ. Vi skal finde hvilken funktion τ er graf for. Lad $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være projektionen $(x,y,z) \mapsto (x,z)$; det er klart, at $\pi \circ \sigma = \phi^{-1}$, hvorpå $\pi \circ \tau$ er identitetsafbildningen fra W ind i W. Vi har altså, at $\tau(s,t) = (s, \psi(s,t), t)$ for en funktion $\psi : W \to \mathbb{R}$, hvorpå vi ser, at τ er graf for ψ.

Vi har nu for $(s,t) \in W$, med $\pi_2 : (x,y,z) \mapsto y$, at

$$\begin{aligned}
\psi(s,t) &= (\pi_2 \circ \sigma \circ \phi)(s,t) = (\pi_2 \circ \sigma)(s + \sqrt{s^2-t}, s - \sqrt{s^2-t}) \\
&= \frac{1}{2}\left((s + \sqrt{s^2-t})^2 + (s - \sqrt{s^2-t})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((s^2 + s^2 - t) + (s^2 + s^2 - t)\right) = 2s^2 - t.
\end{aligned}$$

Altså er τ graf for funktionen $\psi : W \to \mathbb{R}$ givet ved $\psi(s,t) = 2s^2 - t$.

d.

Vi skal slutteligt finde $q \in W$, så $\phi(q) = p = (2,0) \in U$. Det ses let, at $q = (1,0) \in W$ opfylder det ønskede.

Derpå findes $\tau(q)$ og $T_q\tau$; vi har, at $\tau(q) = \sigma \circ \phi(q) = \sigma(p) = (1,2,0)$. Da $\tau(s,t) = (s, 2s^2 - t, t)$, vil

$$D\tau(q) = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4s & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{(s,t)=q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da er

$$T_q\tau = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$