Geom1
Obligatorisk opgave 3

Rasmus Sylvester Bryder

10. maj 2010

Exercise 7, side 56

Lad $\gamma(t) = (\frac{2}{3}\cos^3 t, \frac{2}{3}\sin^3 t)$ for $t \in \mathbb{R}$; γ er klart glat. Der skal bestemmes for hvilke værdier af t, at γ er regulær.

Da $(\sin^3 t)' = 3\cos t \sin^2 t$ og $(\cos^3 t)' = -3\sin t \cos^2 t$, vil

$$\gamma'(t) = (-2\sin t \cos^2 t, 2\cos t \sin^2 t)$$

for $t \in \mathbb{R}$. Vi har, at $\gamma'(t) = (0,0)$ hvis og kun hvis $\sin t = 0$ eller $\cos t = 0$; altså hvis og kun hvis $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. γ er altså regulær for $t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Der skal endvidere bestemmes en retningsbevarende omparametrisering med enhedsfart på stykket af γ, hvor $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Vi bemærker pr. foregående, at γ er regulær på det stykke, og altså er $g := \gamma|_{(0,\frac{\pi}{2})}$ regulær. Sætning 3.3 giver, at en sådan omparametrisering findes. Vi har for $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, at

$$\begin{aligned} \|g'(t)\| &= \sqrt{4\sin^2 t \cos^4 t + 4\sin^4 t \cos^2 t} = 2\sin t \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= 2\sin t \cos t, \end{aligned}$$

grundet idiotformlen, og da $\sin t > 0$ og $\cos t > 0$ for $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Da $(\sin^2 t)' = 2\sin t \cos t$, er $G(t) = \sin^2 t$ en stamfunktion for $t \mapsto \|g'(t)\|$, og endvidere er $G'(t) > 0$ for $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, da $\sin t > 0$ og $\cos t > 0$ for sådanne. G ses let at være glat.

Sætning 2.5 giver nu, at G er bijektiv på $(0, \frac{\pi}{2}) \to (0,1)$, thi $(0,1)$ er billedet af sin på $(0, \frac{\pi}{2})$ og dermed også af $\sin^2$, samt at den inverse $\phi : (0,1) \to (0, \frac{\pi}{2})$ er glat. Nu vil $g \circ \phi$ være en omparametrisering af g. Beviset for sætning 3.3 giver, at den er retningsbevarende og har enhedsfart, thi vores konstruktion er som i beviset.

Vi har nu for $x \in (0,1)$, at der findes $s \in (0, \frac{\pi}{2})$, så $x = \sin^2 s$; dette medfører, at $\sin s = \sqrt{x}$ og endelig, at $s = \arcsin\sqrt{x}$ (da arcsin er bijektiv på $(-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Vi har altså, at $\phi : (0,1) \to (0, \frac{\pi}{2})$ er givet ved $\phi(s) = \arcsin\sqrt{s}$, og dermed vil omparametriseringen af g være givet ved

$$g(\phi(s)) = \left(\frac{2}{3}(\cos\arcsin\sqrt{s})^3, \frac{2}{3}s\sqrt{s}\right)$$

for $s \in (0,1)$.

Exercise 19, side 58

Lad $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ (en vindelflade). Arealet af σ over

$$D = \{(u,v) \mid 0 \leq v \leq 1, v \leq u \leq 1\}$$

skal bestemmes; altså

$$A(\sigma, D) = \int_D \|\sigma_u' \times \sigma_v'\| dA.$$

Vi har, at $\sigma_u'(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)$ og $\sigma_v'(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, så

$$\sigma_u'(u,v) \times \sigma_v'(u,v) = (\sin v, -\cos v, u(\cos^2 v + \sin^2 v)) = (\sin v, -\cos v, u).$$

Altså vil $\|\sigma_u'(u,v) \times \sigma_v'(u,v)\| = \sqrt{1+u^2}$. Lad $(u,v) \in D$. Da vil $0 \leq v \leq u \leq 1$, så $0 \leq u \leq 1$. Endvidere vil $0 \leq v \leq u$. Vi får altså, at

$$D \subseteq \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\}.$$

Den anden inklusion fås analogt. Derfor fås nu ved at benytte sætning 3.7, idet $(u,v) \mapsto \sqrt{1+u^2}$ er kontinuert, at

$$A(\sigma, D) = \int_D \|\sigma_u' \times \sigma_v'\| dA = \int_0^1 \int_v^1 \sqrt{1+u^2}\, du\, dv = \int_0^1 \int_0^u \sqrt{1+u^2}\, dv\, du.$$

Da er arealet udtrykt som to ens dobbeltintegraler. Vi beregner det sidste:

$$\begin{aligned} A(\sigma, D) &= \int_D \|\sigma_u' \times \sigma_v'\| dA = \int_0^1 \int_0^u \sqrt{1+u^2}\, dv\, du \\ &= \int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{w}\, dw = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}w^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}, \end{aligned}$$

idet vi benytter substitutionen $w = 1 + u^2$, som er bijektiv på $\mathbb{R}_+$, så $\frac{dw}{du} = 2u$.

Exercise 9, side 56

Lad $\beta = \gamma \circ \phi : J \to \mathbb{R}^n$ være en retningsbevarende omparametrisering af $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, hvor $I, J \subseteq \mathbb{R}$ er åbne (dvs. $\phi : J \to I$ er glat og bijektiv med glat invers) og antag, at både β og γ har enhedsfart. Der skal vises, at der findes $c \in \mathbb{R}$, så $\phi(s) = s + c$ for alle $s \in J$.

Vi har nemlig grundet kædereglen, at $\beta'(s) = \gamma'(\phi(s))\phi'(s)$ for $s \in J$. Ved at tage normer på begge sider, får vi, at $\|\beta'(s)\| = 1$ og $\|\gamma'(\phi(s))\| = 1$ pr. antagelse, så $|\phi'(s)| = 1$ ligeså (ϕ er en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Da β er retningsbevarende, er $\phi'(s) > 0$, så $\phi'(s) = 1$.

Da ϕ og funktionen $s \mapsto s$ på J er stamfunktioner til ϕ', findes $c \in \mathbb{R}$, så $\phi(s) = s + c$, hvorpå fås det ønskede. Hvis $I = (a,b)$, vil J da være på formen $J = (a-c, b-c)$, thi ϕ er bijektiv.

Hvis ϕ var antaget retningsvendende, ville vi med samme udregninger finde, at $\phi'(s) = -1$, så $\phi(s) = -s + d$ for et $d \in \mathbb{R}$. J ville da være på formen $J = (c-b, c-a)$, hvis $I = (a,b)$.