# Geom1
# Obligatorisk opgave 4

Rasmus Sylvester Bryder

17. maj 2010

Lad $\sigma(u, v) = (u, u + v, (u + v)^2)$ for $u, v \in U = \mathbb{R}^2$.

## Eksamen 2008-1, opgave 1

Der skal angives, som det skrevet står,
at vi ved $\sigma$ nu en flade får.
Vi higer her at den er en-til-en,
med regularitet - o, sikken en!
Samt skal findes tre koefficienter,
til første grundform; men med dem vi venter.
Vi dog afslører formen $E$ skal ha:
tag kvadrat af $u$ plus $v$ og da
gang med 4, læg 2 til; hvor fin!
$F$ og $G$ er ens: $E$ minus 1.

Først må konstateres uden råben,
at $U$ er hele planen - dermed åben.
Og $\sigma$ er genkendeligt, nu se så!
en flade givet ved en parameter.

Komponentfunktioner glatte ses
som afbildninger af $u$ og $v$; nu vis,
at $\sigma$ glat som flade faktisk er.
Vi finder da Jacobi lige her.
I første søjle fås 1, 1 og se!
En dejlig doblet sum af $u$ og $v$.
Anden søjle næsten samme, jo:
et nul, et ettal, $u + v$ à to.
Lad $(u, v)$ nu i $U$ og søjler kryds:
vor førstekoordinat er intet lys -
dobbelt $u + v$ træk fra det selv.
Et nul det giver; det ved vi alle vel.
Vor andenkoordinat er let at se,
fås et minus, doblet $u + v$.
En enhed nu på tredjepladsen stå,
og hov! Nu ses, at aldrig vi kan få,

at 0 på alle pladser her kan være,
så fladen er nu fundet regulær.

Vi viser nu, at den er injektiv;
forløbet her er let - o skønne liv!
For antag nu, at billederne er ens
for tupler to i $U$, og nu det ses:
kald tupler $u$ og $v$, $(u_0, v_0)$;
en gave her nu fås – og snart i mål!
Billederne på første plads nu gi'r
at $u$ må være klart $u_0$, og vi'r,
at anden plads nu siger os om $v$,
$u_0$ plus $v_0$, $u$ væk, giver det.
Altså giver det, $v$ er $v_0$.
Og en-til-en er vist: og spis no'et kål.

Til slut vi finder $E$ og $F$ og $G$.
Vi lader nu i $U$ et $u$ og $v$.
Nu $E$ kvadrat på længden nemlig er
af første søjle fundet lige før.
Den må da være 1 plus 1 og så
kvadrat på doblet $u$ og $v$, hvorfor
vi får, at $E$ er nu lig 2 samt mere:
kvadrat af $u$ plus $v$, og doblet 4.
$F$ som prikprodukt vi nu skal finde,
begge søjler prikkes, vi til minde
ser, at $F$ er sum af 1 og 0
og kvadratet ovenfor - o, hvilket guld!
$G$ til sidst vi søger, se nu da,
kvadrat på længde anden søjler tag.
Et 0 og 1 og det kvadrat fra før;
det kommer nu så ofte jeg er skør.
Altså ses nu $F$ og $G$ er samme,
og begge $E$, blot minus 1, de ramme.
Nu så kan ses, at ønskede er vist,
jeg ikke rimer mere, se blot det næst'.

# Eksamen 2008-1, opgave 2

**a.**

Vi skal vise, at vektoren (2,1,0) tilhører tangentrummet $T_q\sigma$, hvor $q = (0,0)$ og angive en kurve $\gamma = \sigma \circ \mu$ på $\sigma$, for hvilken $\gamma(0) = (0,0,0)$ og $\gamma'(0) = (2,1,0)$.

Vi har, at $T_q\sigma$ er underrummet i $\mathbb{R}^3$ udspændt af $\sigma'_u(q)$ og $\sigma'_v(q)$, nemlig

$$\sigma'_u(q) = (1,1,0) \text{ og } \sigma'_v(q) = (0,1,0).$$

Deraf fås, at

$$T_q\sigma \ni 2\sigma'_u(q) - \sigma'_v(q) = 2(1,1,0) - (0,1,0) = (2,1,0),$$

så det ønskede er fundet.

Vi ser tydeligt, at $\sigma(q) = (0,0,0)$. Beviset for sætning 2.4 giver os en idé til hvordan den ønskede kurve angives; vi definerer kurven $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\mu(t) = (2t, -t)$ (fra koefficienterne 2 og $-1$ fundet ovenfor til $\sigma_u'(q)$ og $\sigma_v'(q)$) og lader $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $\gamma(t) = \sigma(\mu(t)) = \sigma(2t, -t) = (2t, t, t^2)$.

$\gamma$ er en parametriseret kurve på $\sigma$, thi den er på formen $\gamma = \sigma \circ \mu$, hvor $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ er en parametriseret glat kurve i planen. Endvidere er $\gamma(0) = (0,0,0)$ og $\gamma'(0) = (2,1,2t)|_{t=0} = (2,1,0)$. Altså har vi fundet en kurve, som opfylder det ønskede.

**b.**
Lad $w = (1,0,2)$ og $A = \{p \in U \mid w \in T_p\sigma\}$. Vi skal vise, at $A = \emptyset$. Antag for modstrid, at $A \neq \emptyset$. Da findes $p_0 = (x,y) \in U$, så $w \in T_{p_0}\sigma$. Vi har nu, at $T_{p_0}\sigma$ består af alle linearkombinationer af vektorerne $\sigma_u'(p_0) = (1,1,2(x+y))$ og $\sigma_v'(p_0) = (0,1,2(x+y))$. Altså findes $a, b \in \mathbb{R}$, så

$$(1,0,2) = a(1,1,2(x+y)) + b(0,1,2(x+y)) = (a, a+b, 2(a+b)(x+y)).$$

Da må $a = 1$ og $b = -a = -1$, men så vil $2 = 2(a+b)(x+y) = 0$, hvilket er en modstrid. Altså er $A = \emptyset$.

# Eksamen 2008-1, opgave 3

Lad $\gamma(t) = (0, t, t^2)$ for $t \in \mathbb{R}$. $\gamma$ er en parametriseret kurve på $\sigma$, da $\gamma = \sigma \circ \delta$, hvor $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved $\delta(t) = (0, t)$ er glat.

**a.**
Vi skal bestemme krumningen $\kappa(t)$ og torsionen $\tau(t)$ for $\gamma$. Vi har, at $\gamma'(t) = (0,1,2t)$ og at $\gamma''(t) = (0,0,2)$ for $t \in \mathbb{R}$, og ser, at $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, hvorpå $\gamma$ er regulær, så $\kappa$ er defineret. Pr. definition 4.4 fås for $t \in \mathbb{R}$, at

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\|(1 \cdot 2 - 2t \cdot 0, -(0 \cdot 2 - 2t \cdot 0), 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\|}{\|(0,1,2t)\|^3} \\ &= \frac{\|(2,0,0)\|}{\sqrt{(2t)^2+1}^3} = \frac{2}{\sqrt{4t^2+1}^3}.\end{aligned}$$

Vi ser, at $\kappa(t) \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, så torsionen $\tau$ er defineret. Endvidere ses, at $\gamma'''(t) = (0,0,0)$ for $t \in \mathbb{R}$. Da er $\det[\gamma'(t)\,\gamma''(t)\,\gamma'''(t)] = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, thi alle 6 led i determinanten skal indeholde en faktor fra $\gamma'''(t)$ og dermed alle er 0. Dermed fås pr. definition 4.5, at torsionen $\tau(t)$ er 0 for alle $t \in \mathbb{R}$.

**b.**
Vi skal bestemme normalkrumningen $\kappa_n(t)$ og den geodætiske krumning $\kappa_g(t)$, idet $\gamma$ er en kurve på $\sigma$. Da $\gamma$ er regulær og $\sigma$ er regulær på hele $U$, specielt i $\delta(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, lades nu $t \in \mathbb{R}$, idet $\kappa_n$ og $\kappa_g$ er definerede. Vi bestemmer nu enhedsnormalen i $\delta(t)$ med vores udregninger fra opgave 1:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m}(t) &= \mathbf{N}(\delta(t)) = \frac{(\sigma_u' \times \sigma_v')(0,t)}{\|(\sigma_u' \times \sigma_v')(0,t)\|} = \frac{(0, 2(0+t), 1)}{\|(0, 2(0+t), 1)\|} = \frac{(0, 2t, 1)}{(4t^2+1)^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2t(4t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \\ (4t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nu vil $\gamma''(t) \cdot \mathbf{m}(t) = 2(4t^2+1)^{-\frac{1}{2}}$. Endvidere vil $\|\gamma'(t)\|^2 = (2t)^2 + 1^2 = 4t^2 + 1$, og vi får endelig, at

$$
\kappa_n(t) = \frac{\gamma''(t) \cdot \mathbf{m}(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} = \frac{2(4t^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{4t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4t^2+1}^3}.
$$

Vi ser derpå, at $\kappa(t) = \kappa_n(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, så korollar 4.8 giver nu, at $\kappa_g^2 = 0$, hvorpå $\kappa_g(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.