# Geom1
# Obligatorisk opgave 6

Rasmus Sylvester Bryder

2. juni 2010

Lad $\sigma(u, v) = (u, u + v, (u + v)^2)$ for $u, v \in U = \mathbb{R}^2$. Vi benytter resultater fra aflevering 4 i det følgende.

Vi fandt i aflevering 4, opgave 1, at koefficienterne for den første fundamentalform for $\sigma$ var $E(u, v) = 2+4(u+v)^2$ og at $F(u, v) = G(u, v) = 1+4(u+v)^2$. Endvidere var $\sigma'_u = (1, 1, 2(u + v))$ og $\sigma'_v = (0, 1, 2(u + v))$, samt $\sigma'_u \times \sigma'_v = (0, -2(u + v), 1)$.

## Eksamen 2008-1, opgave 4

**a.**

Vi skal bestemme hovedkrumningerne $\kappa_1$ og $\kappa_2$ samt Gauss-krumningen $K$, for $\sigma$ i $p = (0, 0)$. De dobbelt afledte findes først: det ses let, at $\sigma''_{uu} = \sigma''_{uv} = \sigma''_{vv} = (0, 0, 2)$. Derfor må

$$L = M = N = \mathbf{N} \cdot \sigma''_{uu} = \frac{\sigma'_u \times \sigma'_v \cdot \sigma''_{uu}}{\|\sigma'_u \times \sigma'_v\|} = \frac{2}{\sqrt{4(u+v)^2 + 1}}.$$

Nu må $E(p) = 2$, $F(p) = G(p) = 1$ og $L(p) = M(p) = N(p) = 2$.

Nu vil matricen for shape-operatoren $W_p : T_p\sigma \to T_p\sigma$ med hensyn til basen $(\sigma'_u, \sigma'_v)$ være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Korollar 5.5.2 giver, at hovedkrumningerne $\kappa$ er løsningerne til ligningen

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 2 & 2-\kappa \end{pmatrix} = -\kappa(2 - \kappa),$$

som har løsningerne $\kappa_1 = 0$ og $\kappa_2 = 2$; dette er altså hovedkrumningerne i $p$. Sætning 6.1 giver endvidere, at $K(p) = \kappa_1\kappa_2 = 0$.

**b.**

Vi skal nu bestemme en enhedsvektor $w \in T_p\sigma$, for hvilken normalkrumningen $\kappa_n$ af $\sigma$ i $p$ med retning $w$ er $\kappa_n = 1$.

Antag, at $w_0 \in T_p\sigma$ er en enhedsvektor, som opfylder ovenstående. Så giver sætning 5.2, at $II_p(w_0) = \kappa_n = 1$. Der findes $a, b \in \mathbb{R}$, så $w_0 = a\sigma'_u(p) + b\sigma'_v(p)$, da $\sigma$ er regulær. Da giver sætning 5.3, at

$$II_p(w_0) = L(p)a^2 + 2M(p)ab + N(p)b^2 = 2a^2 + 4ab + 2b^2 = 2(a + b)^2 = 1.$$

Vi har endvidere, at $w_0 = a\sigma'_u(p) + b\sigma'_v(p) = (a,a,0) + (0,b,0) = (a, a+b, 0)$, og da $\|w_0\|^2 = 1$, vil $a^2 + (a+b)^2 = 1$. Da $(a+b)^2 = {}^1/_2$, vil $a^2 = {}^1/_2$. Da vil $a = {}^{\sqrt{2}}/_2$ eller $a = -{}^{\sqrt{2}}/_2$. Da $(a+b)^2 = {}^1/_2$, vil i tilfældet $a = {}^{\sqrt{2}}/_2$ enten gælde $b = 0$ eller $b = -\sqrt{2}$, og i tilfældet $a = -{}^{\sqrt{2}}/_2$ vil gælde $b = 0$ eller $b = \sqrt{2}$. Altså har vi, at $w_0$ enten er $({}^{\sqrt{2}}/_2, 0)$, $({}^{\sqrt{2}}/_2, -\sqrt{2})$, $(-{}^{\sqrt{2}}/_2, 0)$ eller $(-{}^{\sqrt{2}}/_2, \sqrt{2})$ med hensyn til basen $(\sigma'_u, \sigma'_v)$.

Ved at lade $w = {}^{\sqrt{2}}/_2\sigma'_u(p) = ({}^{\sqrt{2}}/_2, {}^{\sqrt{2}}/_2, 0)$, som er en enhedsvektor og ligger i $T_p\sigma$, ser vi ved sætning 5.2, at $\kappa_n$ af $\sigma$ i $p$ med retning $w$ er

$$\kappa_n = \frac{II_p(w)}{\|w\|^2} = II_p(w) = 2({}^{\sqrt{2}}/_2)^2 + 4({}^{\sqrt{2}}/_2)\cdot 0 + 2\cdot 0^2 = 2({}^{\sqrt{2}}/_2)^2 = 1.$$

Dermed er et $w$ fundet, som opfylder det ønskede.

# Eksamen 2008-1, opgave 5

Lad $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være grafen $\rho(x,y) = (x, y, h(x,y))$ for funktionen $h(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2$. Lad endvidere $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved $\psi(u,v) = (\sqrt{2}u + {}^{\sqrt{2}}/_2 v, {}^{\sqrt{2}}/_2 v)$.

**a.**

Vi skal gøre for, at $\rho \circ \psi$ er en orienteringsbevarende omparametrisering af $\rho$.

$\rho$ er glat, da dens komponentfunktioner er glatte, og da det er en graf, er den regulær.

Vi viser, at $\psi$ er en diffeomorfi. Det er klart, at $\psi$ er lineær, thi lader vi

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & {}^{\sqrt{2}}/_2 \\ 0 & {}^{\sqrt{2}}/_2 \end{pmatrix},$$

vil $\psi(u,v) = B(u,v)$. Da $\det B = \sqrt{2}\cdot {}^{\sqrt{2}}/_2 = 1 > 0$, vil $\psi$ være bijektiv. $\psi$ er glat, thi $\psi$ har lineære og dermed glatte komponentfunktioner. Da afbildningen $\psi^{-1}$ tillige er lineær, thi den udtrykkes ved $B^{-1}$, vil den også være glat af samme årsag. Da er $\psi$ en diffeomorfi, og $\rho \circ \psi$ er en omparametrisering af $\rho$ jf. definition 2.6.2. Da Jacobi-matricen for $\psi$ netop er $B$ jf. eksempel B.1, vil $\det(D\psi) = \det B = 1 > 0$ på hele $\mathbb{R}^2$, vil $\rho \circ \psi$ være orienteringsbevarende.

**b.**

Vi skal vise, at $\psi$ inducerer en isometri fra $\sigma$ til $\rho$, og finde hvad der kan konkluderes om Gauss-krumningerne $K_\sigma(u,v)$ og $K_\rho(u,v)$ for de to flader.

Lad os først bestemme $\tau = \rho \circ \psi$. For $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ vil

$$\begin{aligned}\rho(\psi(u,v)) &= \rho(\sqrt{2}u + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, \tfrac{\sqrt{2}}{2}v) = (\sqrt{2}u + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}u + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v)^2) \\ &= (\sqrt{2}u + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}u + \sqrt{2}v)^2) = (\sqrt{2}u + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, \tfrac{\sqrt{2}}{2}v, (u+v)^2).\end{aligned}$$

Altså vil $\tau'_u = (\sqrt{2}, 0, 2(u+v))$ og $\tau'_v = ({}^{\sqrt{2}}/_2, {}^{\sqrt{2}}/_2, 2(u+v))$. Vi ser nu, at

$$E_\tau(u,v) = \|\tau'_u\|^2 = 2 + 4(u+v)^2 = E_\sigma(u,v),$$

$$F_\tau(u,v) = \tau'_u \cdot \tau'_v = \sqrt{2}\cdot {}^{\sqrt{2}}/_2 + 4(u+v)^2 = 1 + 4(u+v)^2 = F_\sigma(u,v)$$

og

$$G_\tau(u,v) = \|\tau'_v\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4(u+v)^2 = 1 + 4(u+v)^2 = G_\sigma(u,v).$$

Altså giver definition 6.5, at $\psi$ inducerer en isometri fra $\sigma$ til $\rho$. Beviset for sætning 6.5 giver dermed, at $K_\sigma(u,v) = K_{\rho\circ\psi}(u,v) = K_\rho(\psi(u,v))$ for alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, hvilket er hvad der kan konkluderes.

## Eksamen 2006-1, opgave 4

Lad $U = \mathbb{R}\times(0,\frac{\pi}{2})$ og $V = \mathbb{R}\times(\frac{\pi}{2},\pi)$, og lad der være givet to flader $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ og $\rho : V \to \mathbb{R}^3$ være givet ved $\sigma(u,v) = \rho(u,v) = (u, v, u\tan v)$. Vi skal vise, at $\psi : U \to V$ givet ved $\psi(u,v) = (-u\tan v, v + \frac{\pi}{2})$ inducerer en isometri fra $\sigma$ til $\rho$ og afgøre, om den vender eller bevarer orientering.

Vi viser først, at $\psi$ er en diffeomorfi. Da specielt $(\tan)' = 1 + \tan^2$, hvorpå tan er glat hvor den er defineret, består $\psi$ af glatte komponentfunktioner og er derfor glat. Vi har nu for $(u,v) \in U$, at

$$D\psi(u,v) = \begin{pmatrix} -\tan v & -u(1+\tan^2 v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvorpå $\det D\psi(u,v) = -\tan v < 0$, da $\tan v > 0$, idet $v \in (0,\frac{\pi}{2})$. Endvidere er $U$ åben i $\mathbb{R}^2$ (da det er et kartesisk produkt af åbne mængder i $\mathbb{R}$). Da antagelsen $\psi(u_0,v_0) = \psi(u_1,v_1)$ for $(u_0,v_0),(u_1,v_1) \in U$ medfører, at $v_0 + \frac{\pi}{2} = v_1 + \frac{\pi}{2}$, hvorpå $v_0 = v_1$, og at $u_0 \tan v_0 = u_1 \tan v_1 = u_1 \tan v_0$, hvorpå $u_0 = u_1$, da $\tan v_0 \neq 0$, vil $(u_0,v_0) = (u_1,v_1)$. Dermed er $\psi$ injektiv.

Vi vil benytte korollar 2.10, og vil derfor vise, at $\psi(U) = V$. Lader vi $(u,v) \in U$, vil $-u\tan v \in \mathbb{R}$ og $v + \frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{2},\pi)$, da $v \in (0,\frac{\pi}{2})$, hvorpå $\psi(u,v) \in V$. Lader vi omvendt $(x,y) \in V$, vil vi vise, at der findes $(u,v) \in U$, så $\psi(u,v) = (x,y)$; lader vi $u = -\frac{x}{\tan(y-\pi/2)} \in \mathbb{R}$ (idet $y \in (\frac{\pi}{2},\pi)$, vil $y - \pi/2 \in (0,\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}$) og $v = y - \frac{\pi}{2} \in (0,\frac{\pi}{2})$, ser vi, at $(u,v) \in U$ og

$$\psi(u,v) = (-(-\tfrac{x}{\tan(y-\pi/2)} \cdot \tan(y-\tfrac{\pi}{2})), y - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = (x,y).$$

Dermed er $\psi(U) = V$, og $\psi$ er altså en diffeomorfi fra $U$ til $V$. Da $\rho$ er graf for $(u,v) \mapsto u\tan v$, er $\rho$ regulær, og $\rho\circ\psi$ er en omparametrisering af $\rho$. Da $\det D\psi(u,v) = -\tan v < 0$, er omparametriseringen orienteringsvendende.

Vi har nu, at $\sigma'_u = (1,0,\tan v)$ og at $\sigma'_v = (0,1,u(1+\tan^2 v))$. Dermed er $E_\sigma = 1 + \tan^2 v$, $F_\sigma = u\tan v(1+\tan^2 v)$ og $G_\sigma = 1 + u^2(1+\tan^2 v)^2$.

Da $\rho(\psi(u,v)) = \rho(-u\tan v, v + \frac{\pi}{2}) = (-u\tan v, v + \frac{\pi}{2}, -u\tan v\tan(v+\frac{\pi}{2}))$ for $(u,v) \in U$ og vi ved, at $\tan(v + \frac{\pi}{2}) = -(\tan v)^{-1}$, vil

$$\rho(\psi(u,v)) = (-u\tan v, v + \tfrac{\pi}{2}, u).$$

Lad $\tau = \rho\circ\psi$. Nu vil $\tau'_u = (-\tan v, 0, 1)$ og $\tau'_v = (-u(1+\tan^2 v), 1, 0)$.

Dermed er $E_\tau = 1 + \tan^2 v = E_\sigma$, $F_\tau = u\tan v(1+\tan^2 v) = F_\sigma$ og $G_\tau = 1 + u^2(1+\tan^2 v)^2 = G_\sigma$. Pr. definition 6.5 inducerer $\psi$ altså en isometri fra $\sigma$ til $\rho$.