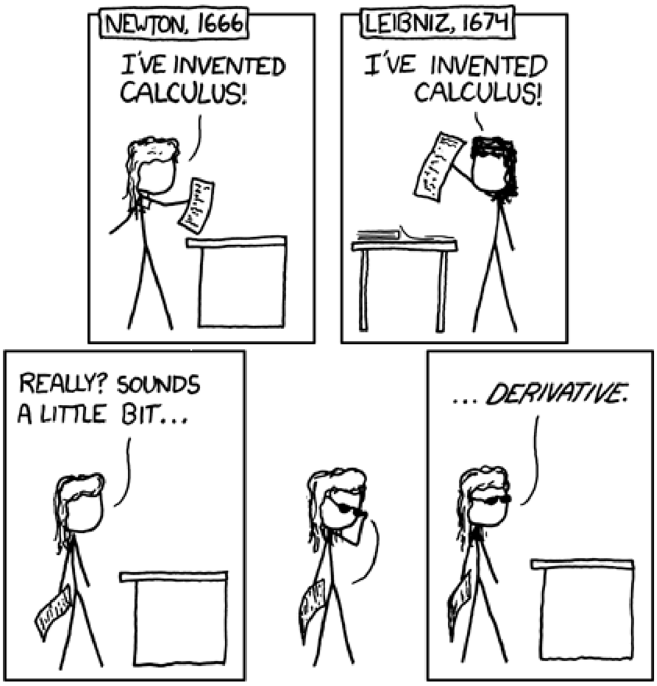
# *Spirerne til differentialregningen i det 17. århundrede*

Gruppe 2A

Rasmus Sylvester Bryder
Troels Henriksen
Søren Frejstrup Grav Petersen
Anders Wolfsberg

8. juni 2010



# Indhold

# 1 Indledning og problemformulering

I det 17. århundrede offentliggjorde Gottfried Leibniz og Isaac Newton værker, der introducerede en ny form for matematisk metode: Differentialregningen. Så betydningsfulde som deres bidrag viste sig at være, så var de dog ikke opstået i et vakuum, og matematisk analyse blev ikke undfanget af disse to mænd alene – tværtimod havde adskillige andre lavet forarbejde på dette område, hvor vi i dette projekt især vil fokusere på Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Isaac Barrow (1630-1677) og Gilles Personne de Roberval (1602-1675). Ud over at præsentere deres resultater, vil vi også foretage en perspektivering til differentialregningens endelige form, og vurdere i hvilken grad den var baseret på disse tidligere resultater.

Naturligvis var ovenstående tidlige arbejde heller ikke opstået af sig selv: Den var også baseret på forudgående arbejde, og det er især denne kontekst vi ønsker at undersøge: Hvordan var Fermat, Descartes, Roberval og Barrows matematik et produkt af foregående matematiske tradition? Især vil vi overveje hvilken indflydelse den geometriske fortolkning af kurver og former havde på den tidlige differensregning, og især hvilke komplikationer den medførte.

Vi vil forsøge at besvare ovenstående spørgsmål via detaljeret analyse af (oversatte) primærkilder, såvel som inddragelse af sekundærlitteratur.

# 2 Forhistorie

Op til det 17. århundrede havde den græske matematik dannet forbillede for næsten al matematik med Euklids værker i centrum. Efter araberne begyndte at benytte den græske og geometriske tankegang til at introducere og retfærdiggøre deres algebra, havde europæerne taget deres innovationer til sig, og i det 16. århundrede var algebraen kommet rigtig langt, med et højdepunkt ved Gerolamo Cardanos publikation af sit hovedværk *Ars magna* i 1545, der blandt andet gav offentligheden løsningen på tredjegradsligningen.

Set med vores øjne var det dog ikke generelle løsningsmetoder til problemstillinger, der var i højsædet op til da. For det første var det udelukkende problemløsninger, som matematiske tekster bestod af – ingen generelle formler, blot vejledende eksempler. For det andet skulle problemerne også have en geometrisk fortolkning for overhovedet at kunne betragtes, hvilket også lagde en betragtelig barriere for udviklingen.

Et væsentligt gennembrud, der kom til at betyde meget for innovationerne inden for den senere analytiske geometri, kom fra François Viète (1540-1603). Da man i det 16. århundrede valgte at sætte kræfter ind på nyoversættelse af de gamle græske tekster til latin, sørgede man for at gøre oversættelserne så pålidelige som muligt ved at lade matematikere lave dem. En af hovedkræfterne inden for projektet var matematikeren Federigo Commandino

(1509-1575), som i sine oversættelser tilføjede kommentarer og referencer til lignende værker. Iblandt de oversatte værker var Pappus' bog om analyse som problemløsningsprocedure, og inspireret af Pappus' beskrivelse søgte Viète med den nyere algebra og dens symbolisme at undersøge ligninger på en anden måde end ved at finde løsninger til dem.

Med Viètes *In artem analyticem isagoge* (1591) markeredes det første skridt inden for generel symbolmanipulation i matematikken. Hans introduktion af symboler for kendte og ubekendte i matematiske problemer medførte, at problemer nu kunne løses generelt og ikke blot for givne værdier, som tidligere havde været måden at løse problemer på. Han kunne dermed afgøre sammenhængen mellem løsninger til problemer og de kendte værdier i problemet. Viète lod sig dog ikke fuldstændigt frigøre fra fortidens matematiske opfattelser i sin innovation. Heriblandt insisterede han på at opretholde homogenitetsloven, som udsiger, at alle led i en given ligning skal være af samme grad – et levn fra Euklid; navnlig, at forhold kun kunne tages mellem kvantiteter af samme slags. Derfor kunne ligningen $x^3 + cx = d$ kun give mening (da $x^3$ skal opfattes som en terning med sidelængde $x$) hvis $c$ var en figur i planen (så $cx$ var rumlig) og $d$ selv var rumlig, hvorved vi i ligningen kun regner med figurer i rummet. Disse fortolkninger af ligninger, som stadig bundede i geometri, blev også udtrykt eksplicit med ord i Viètes ligningsopstillinger. Altså var tankegangen fra tidligere bibeholdt hos Viète, men med sin nye notation havde han åbnet døre, som fjernede mange begrænsninger.

Simon Stevin (1548-1620) var blandt de mange, der forsøgte at bane vejen for en ny matematisk tænkning. Hans introduktion af en ny notation for brøker, navnlig decimalbrøker, og påvisning af, at regneregler for disse er netop som for hele tal, gav anledning til den tankegang, at der ikke er noget skel mellem størrelser og hele tal, som Euklid i sin tid forelagde. Alle reelle tal kunne nu repræsenteres på samme måde, netop som decimalbrøker. Specielt mente han, at alle reelle tal, heriblandt også irrationale, kan tilnærmes med rationale tal, og det derved er muligt at tildele ethvert liniestykke en længde. Dette udgjorde et skarpt brud med den aristoteliske tankegang om generel usammenlignelighed mellem tal og størrelser (Katz, s. 414).

Denne omvæltning af den matematiske tænkning kom i en periode, der nutildags kaldes *den videnskabelige revolution* (betegnelsen er stadig omdiskuteret). Heri lagdes grunden for moderne videnskab sammen med en afvisning af de gamle græske videnskabsfilosofier. Fysikkens og astronomiens udvikling kom her til at betyde meget for opfattelsen af matematikken. I fysikken havde man tidligere kun benyttet matematiske modeller i forbindelse med statiske opstillinger, som dem hos Arkimedes, men Galileo Galilei (1564-1642) gjorde nogle opdagelser inden for bevægelse, som han kunne begrunde matematisk. Han benyttede her geometrien som argumentationsværktøj, og ikke algebraen.

To af Galileis fundamentale opdagelser var, at et legeme i frit fald bevæger sig med uniform acceleration, og at et legeme, der fra hviletilstand accelereres uniformt i et tidsrum, vil bevæge sig det halve af den afstand det ville tilbagelægge, hvis det bevægede sig med sluthastigheden i det samme tidsrum. Som korollar heraf følger blandt andet, at afstandene tilbagelagt for sådanne er proportionale med kvadrater på tidsrummene. Selvom Galilei heri ikke beskæftiger sig direkte med funktioner, som ovenstående måske implicerer, er han altså ikke langt fra at sige, at tilbagelagt afstand afhænger af tid.

Galilei diskuterede ligeledes bevægelsen af projektiler, og hvordan disse er sammensat af to bevægelser – en vandret med konstant hastighed og en lodret med naturlig acceleration – og beviste, at sådanne projektiler tegner en parabelkurve ved deres bevægelse. Nærmere beviste han, at projektiler affyret fra kanoner tilbagelægger den største afstand, hvis affyringsvinklen er $45°$. Galilei benyttede hertil eksperimenter for at eftervise sine matematiske deduktioner og afgøre deres sandhed.

Med Galilei blev vejen altså banet for et begreb om bevægelse i matematikken, idet f.eks. parabler nu kunne betragtes som veje tilbagelagt af projektiler. Denne fortolkning skulle vise sig at have megen indflydelse på den senere matematik, som Newton og Leibniz kortlagde, og med hjælp fra blandt andre Viète var der lagt op til megen nyskabelse inden for det næste århundrede.

Pierre de Fermat brugte efter sin graduering nogle år i Bordeaux på at studere med tidligere elever af Viète, og gennem disse studier blev han bekendt med Viètes algebraiske symbolik, som han omsatte mange gamle græske værker til. Gennem dette arbejde og bekendtskabet med grækernes analyse blev han inspireret til på egen hånd at benytte algebraen i samspil med geometrien.

## 3 Fermat

I *"On a Method for the Evaluation of Maxima and Minima"* beskriver Fermat en metode til maksimering og minimering af funktioner, omend dette ikke er de ord han selv vælger. I stedet opfatter han problemet i geometriske termer, som det var sædvane på den tid, og særligt den ubekendte i problemet begrænser han til tre dimensioner.

For at beskrive Fermats metode, vil vi gennemgå nogle eksempler, som Fermat selv benytter til at forsvare korrektheden og generaliteten af sin metode. Det skal dog bemærkes, at hans ord *"we can hardly expect a more general method"* klinger hult når man med nutidens øjne kan se begrænsningerne i hans geometriske fremgangsmåde.

Vi vil benytte den moderne algebraiske notation, der også er brugt i kilden, selvom Fermat ikke selv benyttede denne i sit arbejde.

## 3.1 Fermats første eksempel

Dette problem omhandler delingen af et linjestykke i to segmenter, således at produktet af de to dele er maksimalt. Lad $b$ udgøre hele linjestykket. I moderne notation skal vi så finde et linjesegment $0 < a < b$ som maksimerer

$$a(b-a) = ab - a^2.$$

Herfra lader Fermat $a + e$ udgøre et linjesegment på $b$, hvorved det andet segment vil være $b - a - e$, og produktet $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Dette bliver sat lig $ab - a^2$, og fælles termer fjernes, således at man opnår ligningen

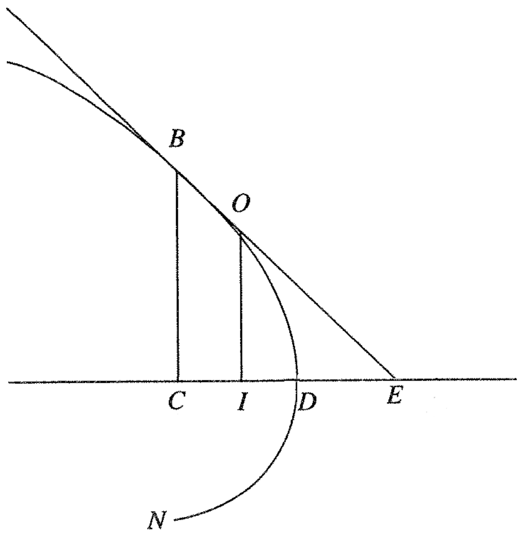
$$2ae + e^2 = be.$$

Dividerer vi igennem med $e$, får vi

$$2a + e = b.$$

Herfra lader vi nu $e$ "forsvinde", og vi får derfor løsningen på problemet til at være

$$a = \frac{b}{2}.$$




## 3.2 Fermats andet eksempel

I sit andet eksempel benytter Fermat maksimeringsteknikken til at finde tangenten til en kurve i et givet punkt.

Givet en parabel $BDN$ med toppunkt $D$ og diameter $DC$, lader vi $B$ være det punkt, hvori vi ønsker at bestemme tangenten $BE$, som krydser diameteren (eller her en forlængelse af den) i punktet $E$. Vi tegner nu ordinaterne $BC$ og $OI$ ned på diameteren, hvor $O$ er et punkt på $BE$ og $I$

ligger på diameteren. Idet kurvens ligning er på formen $x = ky^2$ (idet Fermat ved, at parablen er tilknyttet netop denne ligning), vil der for to punkter $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ på kurven gælde, at $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1^2}{y_2^2}$. Antages det nu, at det andet punkt $(x_2, y_2)$ ligger oven for kurven, må der gælde, at dennes $y$-værdi er større end det ville være på kurven, og der vil derfor gælde $\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1^2}{y_2^2}$. Vi har derfor i vores tilfælde, idet $O$ ligger oven for parablen, at $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, og idet $BCE$ og $OIE$ er ligedannede trekanter, vil $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$. Dette giver altså, at vi har $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$. Idet $B$ er givet, er $BC$, derpå $C$ og dermed $CD$ naturligvis kendte størrelser, da de kun afhænger af $B$. Vi lader derfor $CD = d$, $CE = a$ og $CI = e$. På baggrund af dette er $DI = d - e$ og $IE = a - e$, hvorpå $IE^2 = a^2 + e^2 - 2ae$. Dette sammen med ovenstående giver derfor

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Ved at gange over kors (som kan gøres, idet vi ved, at det er afstande vi har med at gøre, og at disse derfor er positive) opnås nu

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - ea^2.$$

Vi sætter nu de to størrelser "lig" (*adequate*) hinanden og fjerner de fælles led, hvilket samlet set giver os:

$$de^2 - 2dae \sim -ea^2,$$

hvilket kan omskrives til:

$$de^2 + a^2 e \sim 2dae.$$

Ved division på begge sider med $e$ fås derfor

$$de + a^2 \sim 2da.$$

Nu fjerner vi de resterende led, som indeholder $e$, og vi får derfor, at

$$a = 2d,$$

som altså giver, at $CE = 2CD$, hvorpå vores problem er løst.

### 3.3 En geometrisk tolkning

En mulig tolkning af Fermats tankegang er at han opfatter $a$ og $a + e$ som forskellige rødder, og altså $e \neq 0$. Det betyder at han i sit første eksempel kan dividere med $e$ for at gå fra $de^2 + a^2 e \sim 2dae$ til $de + a^2 \sim 2da$, og i sidste ende nå $de + a^2 \sim 2da$.

Fermat ved, at funktionen er maksimal når $e = 0$, og tillader sig derfor at fjerne ledet $de$ for at nå resultatet $a = 2d$. Spørgsmålet er nu, hvad der giver Fermat berettigelse til at foretage denne paradoksale operation. En mulighed udspringer fra det faktum, at Fermat opfattede $e$ som angivende at de to rødder var forskellige, selv når deres differens var 0 (Katz, s. 509). I denne fortolkning regner Fermat med $e$ som et tal, men tillægger det desuden yderligere abstrakte egenskaber, uden at han dog er helt eksplicit om disse.

### 3.4 Diskussion af Fermats metode

Fermats første eksempel lader sig nemt opskrive med moderne differentialregningsteknikker:

Lad igen længden af hele linjestykket være $b$ og længden af linjesegmentet vi ønsker at finde $a$. Længden af det andet linjesegment er nu $b - a$, og produktet er givet ved funktionen $f(a) = ba - a^2$. Vi har derfor

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{e \to 0} \frac{f(a) - f(a+e)}{e} \\
&= \lim_{e \to 0} \frac{ba - a^2 - b(a+e) + (a+e)^2}{e} \\
&= \lim_{e \to 0} \frac{be - 2ae - e^2}{e} \\
&= \lim_{e \to 0} b - 2a - e \\
&= b - 2a.
\end{aligned}
$$

Ved en simpel monotoniundersøgelse i form af ligningen $f'(a) = 0$, får vi $a = \frac{b}{2}$ til at være maksimeringen præcis som ovenfor i Fermats eksempel.

Parallellerne til Fermats metode er nemme at se, men det må understreges at Fermat i ingen af sine overlevende skrifter giver en direkte beskrivelse af grænseværdier, og man må derfor være påpasselig med ikke at tillægge hans arbejde egenskaber, som ikke kan begrundes ud fra datidens kilder. Det største problem i Fermats metode skyldes netop manglen på et præcist grænsekoncept, idet han først antager at $e \neq 0$, og derefter at $e = 0$. Med moderne begreber ville vi udtrykke at $e$ bevæger sig vilkårligt tæt på 0, men denne idé figurerer ikke i nogen af Fermats skrifter.

Det er dog i almindelighed svært at tolke Fermats tanker, thi han var ikke særligt interesseret i at udgive sit arbejde formelt, og præsenterede kun få beviser for sine resultater. I stedet for argumenterede han for deres sandhedsværdi ved at benytte dem i komplicerede eksempler og sammenhænge, et argument der ikke var i tråd med tidens idealisering af den græske model for bevisførelse, men som Fermat tilsyneladende selv fandt tilstrækkeligt. Udsagn som *"this method never fails"* mere end antyder at Fermat ikke selv var i tvivl om sandhedsværdien af metoden, men det er uklart om dette skyldes en dyb intuitiv forståelse, eller beviser der nu er gået tabt.

René Descartes havde som Fermat også studeret Viètes værker, og han havde tillige opdaget, at disse kunne bruges til forståelse af grækernes analyse. Han begyndte derfor at studere forholdet mellem geometri og algebra, om end på en anden måde end Fermat, idet han fandt, at han kunne benytte analysen til at løse geometriske problemer.

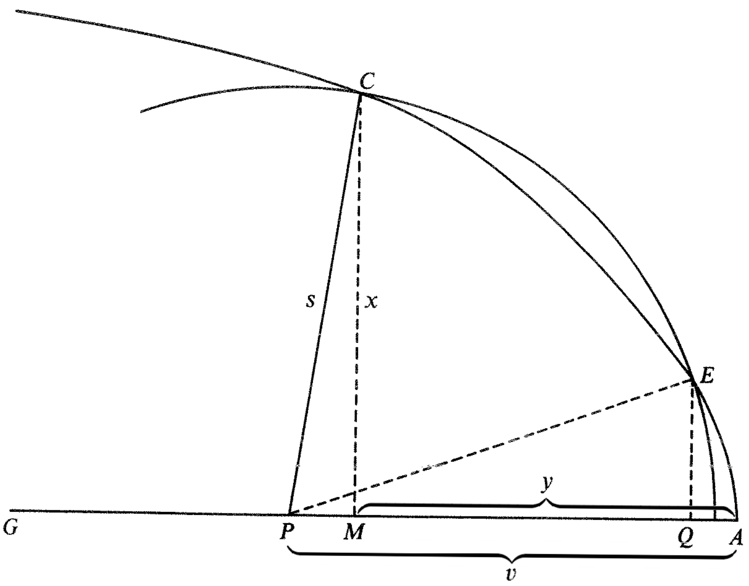
# 4 Descartes

Et af Descartes' store mål videnskabeligt, var at generalisere vanskelige videnskabelige problemer, heriblandt specielt matematiske. Han mente, at man ved generalisering af problemerne kunne opnå løsningsalgoritmer, som både lettede arbejdet for videnskabsmanden, men samtidig også gjorde at den "jævne" videnskabsmand ville kunne løse disse mere komplicerede problemer. I det følgende vil vi kigge nærmere på denne "nye videnskabelige" metode Descartes havde udviklet, og specielt dens anvendelse inden for matematik (geometri). For at komme rundt om dette, vil vi gennemgå *"The method of normals"*, hvor Descartes finder (hvad han kalder) en generel løsning til at finde normalen i et givet punkt på en kurve.

Descartes springer i teksten frem og tilbage mellem en generel beskrivelse af sin metode og et specifikt eksempel – ellipsen. For at overskueliggøre fremgangsmåden vil vi ændre på strukturen og først forklare metoden og derefter dens anvendelse i det specifikke eksempel, og således opnå et skarpere skel mellem generalitet og specificitet.

## 4.1 Problemstilling

Descartes vil gerne finde vinklen mellem to kurver i deres skæringspunkt. Dette, siger han, er det samme som at finde vinklen mellem to tilsvarende rette linjer, nemlig kurvernes tangentlinjer i punktet. For at bestemme en tangentlinje bemærker han, at det er tilstrækkeligt at have metoden til at bestemme normalen til en kurve i et givet punkt (herfra er det velkendt at finde tangenten ud fra Euklid, Proposition I-11). Alt i alt ønsker Descartes altså at finde en metode til at finde normalen til en kurve i et givet punkt.




## 4.2 At gøre problemet algebraisk

Lad en kurve være tegnet sammen med en referenceakse $AG$, således at $A$ er skæringspunkt mellem kurven og referenceaksen. Vælg et punkt $C$ på kurven. Tegn linjen fra $C$, der står vinkelret på $AG$, med skæringspunkt i forhold til $AG$ benævnt $M$. Betegn nu afstanden mellem $M$ og $A$ ved $y$, og mellem $C$ og $M$ ved $x$. Antag nu, at problemet er løst; altså, at der er tegnet en normal til kurven i $C$, og forlæng denne normal til den skærer $AG$ i $P$. Afstanden mellem $C$ og $P$ kaldes nu $s$, og den mellem $A$ og $P$ kaldes $v$. Herpå vil afstanden mellem $P$ og $M$ være $v - y$. Eftersom trekant $PMC$ er retvinklet, gælder Pythagoras' læresætning på denne, og så er

$$s^2 = x^2 + (v - y)^2 = x^2 + v^2 + y^2 - 2yv.$$

Dette giver anledning til en cirkel med centrum $P$ og radius $s$.

## 4.3 Algebraisk simplificering

Herfra isolerer Descartes enten $x$ eller $y$, eller potenser af disse alt afhængigt af, hvad der er krævet i det specifikke tilfælde, i ligningen for cirklen. Således får han $x = \sqrt{s^2 - v^2 - y^2 + 2yv}$ og $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. Derved, siger han, er det muligt ved substitution med ovenstående i specifikke tilfælde at opstille en ligning for skæringen mellem den givne kurve og cirklen ovenfor, hvor enten $x$ eller $y$ ikke optræder.

### 4.4 Geometrisk løsning og algebraisk fortolkning

Descartes' idé er nu at tegne cirklen med centrum i $P$ og radius $s$. Hvis $CP$ er normal på kurven, vil cirklen røre kurven i $C$ og ikke skære den – men hvis $P$ er bare en smule tættere på eller længere fra $A$, vil cirklen ikke kun røre $C$, men skære kurven i $C$, og dermed også i et andet punkt $E$ på kurven. Således vil kurvens ligning altså få to forskellige rødder. Geometrisk set, forklarer Descartes, kan man tegne en linje fra $E$, der står vinkelret på $AG$ i punktet $Q$, og så vil afstanden fra $E$ til $Q$ være den anden $x$-rod (hvor den første var afstanden mellem $C$ og $M$), mens afstanden fra $A$ til $Q$ er den anden $y$-rod (hvor den første var afstanden mellem $M$ og $A$). Descartes bemærker nu, at der kan være tilfælde, hvor der kun er én sand rod, da den anden bliver negativ (den tegnes i modsat retning i forhold til referenceaksen). Jo tættere på hinanden $E$ og $C$ er, jo mindre vil forskellen på $x$- og $y$-rødderne være henholdsvis. Præcis når $C$ og $E$ falder sammen, vil rødderne være lig hinanden og her er der altså tale om en dobbeltrod. I dette tilfælde rører cirklen kun kurven i $C$.

Herefter benytter Descartes et af hans teoretiske resultater om polynomier (Katz, s. 482), der udsiger følgende: Når en ligning (algebraisk ligning) har to ens rødder, og alle led i ligningen er rykket over på venstresiden af lighedstegnet, vil det være lig med $(y-e)^2r(y)$, hvor $e$ er dobbeltroden, $y$ er den ukendte og $r(y)$ er et kvotientpolynomium, der sørger for at der opnås samme polynomiumsgrad som i den oprindelige ligning. Specielt vil koefficienterne foran de samme potenser der indgår på hver side af ligningen være lig hinanden. Dette gør det nemt at isolere bestemte udtryk i ligningen, som på dette grundlag nødvendigvis må være ens. Herved kan de ubekendte i det givne problem løses, og normalen kan bestemmes.

### 4.5 Eksempel på brug af Descartes' metode

For at gennemgå denne metode, som Descartes har opstillet, vil vi nu give et eksempel på brug af metoden. Vi vil lade den givne kurve være en ellipse, og ønsker nu at finde normalen til et givet punkt $C$ på ellipsen. Ellipsens diameter eller storakse kaldes $GA$. Vi vælger derfor linjestykket $MA$ til at være den del af $GA$, hvor $CM$ står vinkelret på linjen $MA$. Hvis ydermere ellipsens storakse benævnes $q$ og dens *latus rectum* $r$ (korden, der er vinkelret på storaksen og gående igennem et af ellipsens brændpunkter), opnås fra Apollonius I-13 ligningen for kurven til at være følgende: $x^2 = ry - \frac{ry^2}{q}$. Substitueres $x^2$ fra cirklens ligning som tidligere beskrevet opnås ligningen:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{ry^2}{q},$$

som efter omrykning er det samme som

$$y^2 + \frac{qr - 2qv}{q - r}y + \frac{qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

For nu at benytte Descartes' resultat om polynomier fås – hvis vi lader $e$ være en dobbeltrod til ligningen – at udtrykket $(y-e)^2$, som jo er det samme som $y^2 - 2ey + e^2$, nødvendigvis må være lig ovenstående, og koefficienterne må derfor være lig hinanden. Dette giver altså, at $\frac{qr-2qv}{q-r} = -2e$, som jo medfører, at $qr - 2qv = 2er - 2qe$, hvorpå $v = \frac{-2er+2qe+qr}{2q}$, og heraf $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{r}{2}$. Men da $e$ var rod til ligningen pr. antagelse, hvorpå $y = e$, idet $e$ altså løser ligningen, kan $y$ indsættes i stedet for $e$, og der vil altså gælde, at $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{r}{2}$. Denne ligning kan løses, idet afstanden $MA$ jo var lig $y$ i punktet $C$, hvor $e$ er dobbeltrod. Heraf kan $v$ altså bestemmes, og da denne fuldstændigt bestemmer punktet $P$ ud fra $A$ og linjen $GA$, er normalen $PC$ altså fundet.

## 4.6 Diskussion af Descartes' metode

Descartes trækker i ovenstående tekst på adskillige resultater fra de gamle grækere, navnlig Euklids cirkelkonstruktioner, Pythagoras' læresætning og Apollonius' resultater om ellipsen. Denne viden kobler han sammen med algebraisk viden, og på denne måde transformerer han sit geometriske problem til et algebraisk problem, som han mener kan løses.

Der er enormt mange nye idéer i Descartes' anskuelse af geometrien. For det første får han ved hjælp af sin referenceakse (som er en forløber for koordinatsystemet) etableret (ligesom Fermat) en forbindelse mellem geometri og algebra, der danner grundlaget for den analytiske geometri.

Han var endvidere også den første til at beskrive kvadratet af et linjestykke som et linjestykke selv. Descartes skriver, at 1 er til $x$ som $x$ er til $x^2$. Da 1 og $x$ kan betragtes som linjestykker, må $x^2$ også kunne det. Dette gjorde ham i stand til at betragte potenser af højere grad end 3, idet disse før i tiden ikke var veldefinerede (som geometriske størrelser). Måske endda vigtigere end dette tillod det ham ligninger mellem størrelser uden at skulle bekymre sig om homogenitetsloven (det, at flader skal være lig flader og rumlige størrelser lig rumlige størrelser osv.), som Viète havde insisteret på.

På baggrund af dette kunne han beskæftige sig med algebraiske problemer med høje potenser uden at bekymre sig om de geometriske problemer, som dette førte med sig. Som betydelig sidegevinst lettede dette også den algebraiske notation, idet man ikke længere behøvede at notere størrelsernes dimension i sine beregninger.

Det ses endvidere i ovenstående tekst, at Descartes forsøger at lave en generel metode til at bestemme normaler til en given kurve. Dette hænger fint sammen med, at Descartes i høj grad efterstræbte generelle løsningsalgoritmer, som kan bruges i ethvert tilfælde. Generaliteten i dette eksempel lider dog af mangel på præcision på en del punkter.

For eksempel definerer Descartes en kurve (Katz, s. 483) som et spor, der er frembragt ved en kontinuert bevægelse. Ved nærmere undersøgelse af metoden til at finde normaler til kurver viser det sig, at metoden kun er anvendelig på algebraiske kurver (Eves, s. 13). Men om han i sin definition af kurver netop har ment de algebraiske kurver, og bare ikke har været i stand til at definere det, er ikke til at vide.

Ydermere kommer Descartes også ud i problemer, når han oversætter sit geometriske problem til et algebraisk problem, idet det meget nemt kunne tænkes, at han ville komme ud i et problem, som ikke var løseligt for ham, f.eks. ligninger af højere potensorden. Dette kan ske i tilfældet, at den givne kurve ikke kun skærer den fremstillede cirkel i 2 punkter, men at den gør det i flere punkter. En mulig løsning i nogle tilfælde til dette er, at referenceaksen ville kunne flyttes tilstrækkeligt tæt på det givne punkt, som normalen ønskes bestemt i, og herved undgå unødvendige skæringer mellem cirklen og kurven. Dette er dog et problem, idet referenceaksen i Descartes' tilfælde ofte ligger fast i forhold til de geometriske kurver han omtaler, og disse kurvers ligninger derved skal ændres i forhold til den nye referenceakse, før problemet på ny kan løses. Descartes tager ikke højde for dette, hvilket er en betydelig mangel i hans metode.

Ydermere kritiserede Descartes stærkt Fermats brug af det mystiske "$e$", der indgår i hans tilsvarende metode til at finde normaler. Descartes mente, at det ikke gav nogen mening at indføre "$e$"'et, regne med det og derefter lade det "forsvinde" igen. Dette argument ville være hvad vi i dag ville omtale som en eksplicit grænseovergang rent notationsmæssigt. Det er klart hvorfor Descartes kritiserer dette punkt, da man på det tidspunkt ikke havde samme intuitive forståelse af grænseovergange som vi har i dag, og da det derfor matematisk ikke virkede stringent nok i forhold til den stærke græske matematiske tradition, som man forsøgte at leve op til. Descartes valgte i modsætning til Fermat at lave sin grænseovergang geometrisk. Dette ses i gennemgangen af metoden, hvor han argumenterer for, at vi kan lade $E$ "gå" imod $C$ og på den måde opnå den nødvendige dobbeltrod, som resulterer i at vi kan løse problemet algebraisk. Denne geometriske grænseovergang er langt mere intuitiv end Fermats, idet den refererer til noget konkret vi kan betragte som bevægeligt, nemlig punktet $E$. Dette gjorde Descartes' metode langt mere forståelig over for hans samtid, idet den ikke griber ud i luften efter noget nyt, men bygger på gamle metoder og begreber som man var vant til på det tidspunkt.

Alt i alt kan man sige, at selvom Descartes' metode til at finde normaler kan kritiseres på mange punkter fra et moderne synspunkt, så har hans videnskabelige metode alligevel vundet indpas i den metode vi benytter i dag. Man kan ud fra hans videnskabelige metode fremsætte en opskrift på hvorledes et geometrisk problem kan analyseres og løses. En sådan opskrift kunne se således ud:

(I) Tegn en figur

(II) Identificér det konkrete problem

(III) Giv alle størrelser navne, både de ukendte og kendte størrelser

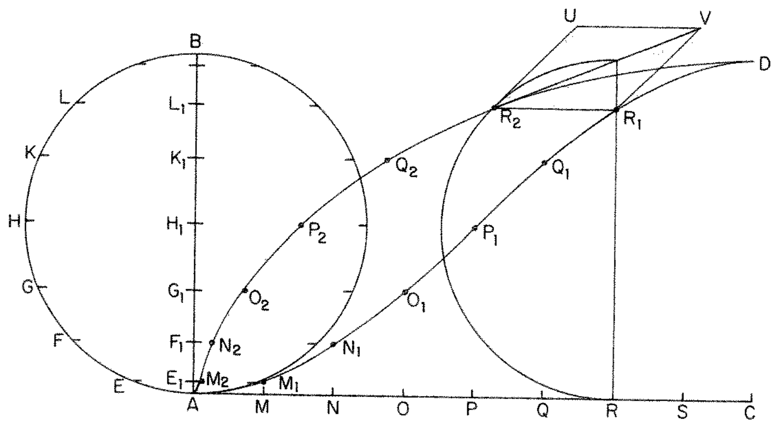
(IV) Opskriv alle kendte relationer mellem disse størrelser

(V) Benyt nu forskellige teknikker på disse relationer indtil man har de ubekendte i ligninger man kan løse

Denne metode eller tilsvarende bliver i moderne matematik benyttet utroligt mange steder til problemløsning og stammer fra George Polyas værk *Mathematical Discovery*, hvori Polya refererer til Descartes' videnskabelige metode i *La Geometrie*. Descartes har altså med denne videnskablige metode inspireret til en ny måde at gribe geometriske problemer an på.

# 5 Roberval

Gilles Personne de Roberval arbejdede på samme tidspunkt som Descartes med konstruktioner af tangenter til kurver, men hvor Descartes omsatte sine geometriske problemer til algebraiske for således at udlede løsninger, lod Roberval sig til forskel inspirere af kinematikken og hastighedsbegrebet à la Galilei. Vi vil her koncentrere os om disses betydning for Robervals konstruktion af en tangent til cykloiden.




## 5.1 Konstruktion af cykloiden og tangent til cykloiden

For at konstruere cykloiden lader Roberval først en cirkel $AEGB$ være givet med diameter $AB$, og med tangent $AC$ i punktet $A$. $AC$ skal være lig halvcirklen $AGB$. Han lader nu diameteren $AB$ bevæge sig langs $AC$ (hvor cirklen følger med), således at den altid er parallel med $AB$ i udgangspositionen, indtil $AB$ ender i $CD$. Samtidig lader han $A$ bevæge sig på halvcirklen

$AGB$, således at hastigheden af denne bevægelse er lig hastigheden af $AB$'s bevægelse langs $AC$. Idet $AB$ har tilbagelagt afstanden $AC$, når den antager positionen $CD$, vil $A$ ligeledes have tilbagelagt denne afstand og dermed ende i $D$ (lod vi cirklen stå stille, ville $A$ ende i $B$).

Positionen af $A$ påvirkes nu af to bevægelser – dens egen bevægelse på halvcirklen $AGB$ og diameterens bevægelse langs $AC$. Det spor, som $A$ tilbagelægger fra $A$ til $D$, er den første halvdel af cykloiden; den anden halvdel er symmetrisk med den første (Roberval, s. 5). Ethvert punkt på cykloiden fremkommer da ved at tage en afstand $AN$ og bevæge sig afstanden $AN$ langs halvcirklen (punktet $F$), hvorpå man skubbes afstanden $AN$ parallelt med $AC$ og ender i $N_2$.

Roberval lader nu $R_2$ være punktet på cykloiden, hvorpå tangenten skal konstrueres. Han trækker derpå en linje $R_2R_1$, der er parallel med $AC$ – hans inklusion af punkterne $M_1, \ldots, R_1$ skyldes primært, at han benytter den kurve, der går igennem disse, til at konkludere noget om arealet under cykloiden (Katz, s. 528). Han trækker ligeledes en linje $R_2U$, der er tangent til den cirkel, hvis position på $AC$ svarer til, at $A$ er i $R_2$, og lader $R_2U = R_2R_1$. Han optegner nu parallelogrammet $R_2UVR_1$ udspændt af disse og trækker diagonalen $R_2V$, som han påstår er den ønskede tangent.

Beviset for dette bygger på parallelogramloven for hastigheder, som går tilbage til Aristoteles, men først blev påvist af Heron (Katz, s. 160). Denne lov siger, at hvis et punkt bevæger sig jævnt langs en ret linje $AB$ fra $A$ til $B$, samtidig med at linjen $AB$ bevæger sig jævnt imod den lige lange linje $CD$ parallel med $AB$, da vil diagonalen $AD$ i det fremkomne parallelogram $ABDC$ være det spor, som punktet tilbagelægger. Det afgørende i Robervals bevis bygger på, at loven kan benyttes til at vise ting om *momentane* hastigheder (Edwards, s. 134).

Det konkrete bevis lyder som følger: Den bevægelsesretning for $R_2$, som skyldes bevægelsen af diameteren $AB$, er $R_2R_1$, og den bevægelsesretning for $R_2$, som skyldes $A$'s cirkulære bevægelse, er $R_2U$. Da disse bevægelser (eller rettere hastigheder) er ens, må $R_2U = R_2R_1$. Altså vil den retning, som $R_2$ bevæger sig i, fås ved diagonalen $R_2V$, siden $R_2V$ er det spor, som $R_2$ tilbagelægger under de to bevægelser, hvorpå $R_2V$ er den ønskede tangent, siden den udtrykker den momentane hastighed for $R_2$.

## 5.2 Diskussion af Robervals metode

Robervals ideer i beviset beskæftiger sig udelukkende med geometriske ideer og er hovedsageligt baseret på viden fra de gamle grækere, hvilket vi også ser i hans afgørende brug af parallelogramloven. Det vigtigste og mest afgørende i Robervals metode er imidlertid her identificeringen af kurver med spor fra punkters bevægelse. Det er her, at han adskiller sig fra grækerne, hvis geometriske beviser kun benyttede sig af statiske enheder og ligeså forhold. Robervals bevis og overvejelser dertil muliggør kinematikken som værktøj til at finde tangenter, og der bringes herved en konkret fysisk indflydelse ind i matematikken, som nærmest ikke var set før hos Galilei, som beskrev projektilers bevægelser som sammensat af to bevægelser.

Man kan imidlertid spørge sig selv, om det er muligt at benytte Herons lov på den måde, som Roberval gør det. Han tager den *momentane hastighed*, der forefindes efter en vis tilbagelagt afstand, og betragter denne som påvirket af to bevægelser med tilhørende hastigheder, hvorpå han *så* benytter Herons lov på disse bevægelser i sig selv. Her har han ikke vist, at det faktisk kan lade sig gøre at opstille problemet således – at betragte noget, der foregår i et enkelt punkt, som noget, der kan udstrækkes til det parallelogram, man ser i beviset. Roberval lader endvidere til at kende sammenhængen mellem tangentens retning og den momentane hastighed i punktet, og han gør implicit brug af denne sammenhæng i beviset, uden selv at redegøre for den.

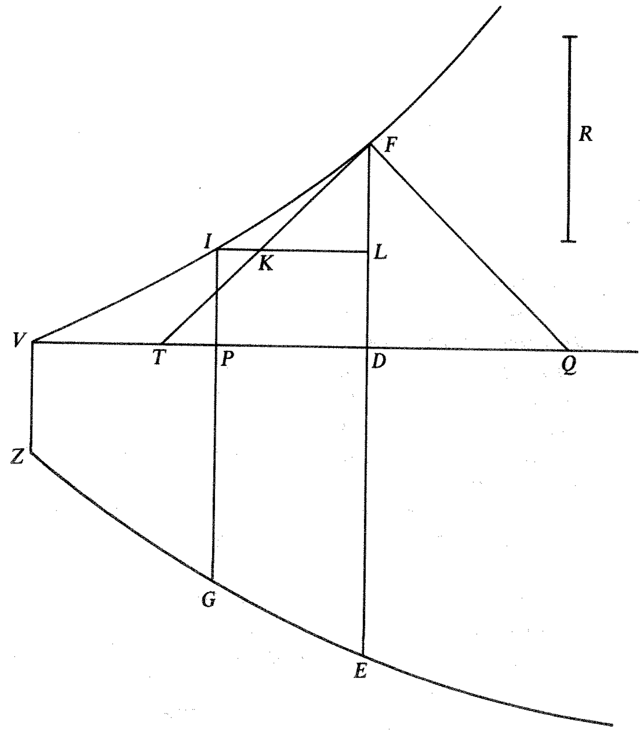
Noget, der dog taler for Robervals metode, er dens umiddelbare anvendelighed under forudsætning af at man kender de simple bevægelser, som genererer den kurve, man vil undersøge, og at man har en akse som $AC$, der kan stå i forhold til de andre bevægelser. Roberval øger anvendeligheden og generaliteten ved at tilføje som et addendum, at hvis de to bevægelser ikke havde været ens, men i et bestemt forhold, da skulle parallelogrammet konstrueres med siderne i samme forhold.

Roberval tager imidlertid ikke skridtet ud over at finde tangenten til kurven, netop fordi han er hindret af den barriere, som geometrien har sat for ham. Her er der ingen analytiske aspekter. Pointen er kun at finde en tangent til ét punkt på kurven, og det er også kun det, som Roberval gør – han ser ikke her sammenhængen mellem tangenter og kurven selv, som Newton og Leibniz senere gjorde. Roberval har dog lagt noget af grundlaget for deres arbejde, idet man kan betragte linjerne $AB$ og $AC$ som en slags akser, gennem hvilke punkterne på cykloiden kan findes; han knytter dog ikke den betydning selv til linjerne.

## 6 Barrow

Ligesom Roberval havde Barrow en kinematisk forståelse af kurver samt en overvejende geometrisk tankegang (Katz, s. 537 og 539). Barrow opnåede dog, til forskel fra Roberval, langt mere generelle resultater. Imens Roberval fandt tangenter til og bestemte arealer under enkeltstående figurer som cykloiden, formåede Barrow at generalisere sine resultater i en sådan grad, at han opdagede det forbløffende inverse forhold imellem tangent- og arealbestemmelse givet ved analysens fundamentalsætning. Dette resultat så dagens lys i 1670, hvor Barrow udgav sin *Lectiones opticae et geometricae*, hvori han samlede op på den viden, han havde fået om tangenter og arealer, på sine rejser omkring i Europa (Katz, s. 534).

Dette værks mest spektakulære sætninger er, som sagt, hans formulering af analysens fundamentalsætning i *Lecture X*, sætning 11 og *Lecture XI*, sætning 19. Vi vil her se på førstnævnte, som den er gengivet i *On tangents and areas*. Formuleringen af sætningen er følgende:




*Lad $ZGE$ være en vilkårlig kurve og lad $VD$ være dens akse. Indtegn linjestykker fra $G$ hhv. $E$, der står vinkelret på $VD$ i punkterne $P$ hhv. $D$, således at afstanden fra $V$ til $Z$ er mindre end den fra $P$ til $G$, som er mindre end den fra $D$ til $E$. Lad nu $VIF$ være en kurve således at: Tegnes en ret linje $EDF$ fra et punkt $F$ på $VIF$ igennem $D$ på aksen $VD$ og ned til $E$ på kurven $ZGE$, der står vinkelret på aksen $VD$, da vil rektanglet med siderne $DF$ og et givent linjestykke $R$ have et areal, der svarer til området $VDEZ$. Lad også $T$ på $VD$ være givet, så $DE : DF = R : DT$, og forbind $T$ og $F$. Da vil $TF$ være tangent til $VIF$.*

## 6.1 Bevis for fundamentalsætningen

Barrow skriver, at et vilkårligt punkt $I$ på kurven $VIF$, imellem $F$ og $V$, vælges. Derefter forbindes $I$ til et punkt $G$ på kurven $ZGE$, således at $IG$ er parallel med $VZ$, samt $I$ forbindes til et punkt $L$ på $FDE$, således at $IL$ er parallel med $VD$. Da vil

$$LF : LK = DF : DT = DE : R$$

eller

$$R \times LF = LK \times DE.$$

Her benytter han, at trekanterne $TFD$ og $KLF$ er ensvinklede. Men, siger han, givet linjestykkerne $DF$ og $LK$'s natur, er $R \times LF =$ området $PDEG$ (dette får Barrow, da rektanglet $R \times LF$ netop er $DF \times R$, hvor $IP \times R$ er fjernet – og $DF \times R$ er jo netop lig området $VDEZ$, mens $IP \times R$ er lig området $VPGZ$, grundet antagelsen om $VIF$ i sætningen). Derfor haves: $LK \times DE =$ området $PDEG < DP \times DE$, hvorfor der må gælde, at $LK < DP$. Så må det også gælde, skriver han, at $LK < LI$. Hvis punktet $I$ vælges på kurven $VIF$ til højre for $F$, siger Barrow, at det på samme måde kan indses, at $LK > DP$, så $LK > LI$. Således ligger hele linjen $TKF$ på eller under kurven $VIF$. Til sidst forklarer Barrow, at hvis istedet $VZ > PG > DE$, vil den samme konklusion nås, og den eneste forskel på situationen vil være, at kurven $VIF$ er konkav i forhold til aksen $VD$.

## 6.2 Fortolkning af sætningen med moderne notation

Aksen $VD$ kan ses som en $x$-akse, og kurven $ZGE$ som en monoton funktion $f(x)$. Kurven $VIF$ kan betragtes som en skaleret stamfunktion til $f$ givet ved

$$g(x) = \frac{1}{R} \cdot F(x) = \frac{1}{R} \int_V^x f(t)dt.$$

At $f(x)$ ligger under $x$-aksen, mens $F(x)$ ligger over den, spiller ingen rolle, da det er de geometriske afstande fra $x$-aksen, som Barrow regner med. Således er længden af $DE$ netop den positive funktionsværdi $f(D)$.

Ligningen $DE : DF = R : DT$, som linjestykket $DT$ opfylder, kan oversættes til $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{R}{|DT|}$ $\left(\Rightarrow \frac{f(x)}{R} = \frac{g(x)}{|DT|}\right)$, og sætningen udsiger så, at hvis linjestykket $DT$ opfylder dette, er det subtangent (linjen fra projektionen af $F$ på aksen $VD$ til skæringen af tangenten i $F$ med aksen) til $g(x)$. Således vil tangenthældningen $g'(x)$ være givet ved

$$g'(x) = \frac{g(x)}{|DT|} = \frac{f(x)}{R}.$$

Men samtidig haves $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R}\int_V^x f(t)dt\right) = \frac{1}{R}\frac{d}{dx}\left(\int_V^x f(t)dt\right)$, hvorpå

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_V^x f(t)dt\right).$$

## 6.3 Diskussion af Barrows metode

Ud fra ovenstående moderne fortolkning af *On tangents and areas*, lader det måske til, at Barrow beviste analysens fundamentalsætning. Man må dog se i øjnene, at den begrebsverden, som Barrow bevæger sig i, er udpræget geometrisk – fjernt fra funktioner, samt differentiation og integration som operationer på sådanne. Hans konstruktion af arealkurven viser, at han er i stand til at betragte arealet under den originale kurve som variabel. Men måske er det netop på grund af det faktum, at han i *On tangents and areas* ikke specifikt anskuer tangenthældningen som en varierende størrelse, at han overser betydningen af sin opdagelse af det inverse forhold mellem tangentkonstruktion og arealbestemmelse – differentiation og integration. Tilsyneladende ser Barrow bare sætningen som én blandt mange, der kan benyttes til at bestemme tangenter, for lige før sætningen skriver han:

> ...I think these [instances] are sufficient to indicate the method, by which (...) one can find tangents to curves (...). Nevertheless, I add one or two theorems, which it will be seen are of great generality, and not lightly to be passed over.
>
> (Child, 2008, s. 116)

På den anden side var Barrow både bevidst om anskuelsen af hastighed som tangenters hældning, samt arealet under hastighedskurver som tilbagelagt afstand (Katz, s. 537). Derfor ville det have været nærliggende for ham at indse, at det er den varierende tangenthældning, der er relevant i sammenhængen mellem arealer og tangenter.

Det er værd at notere, hvor høj grad af generalitet Barrow formår at fremvise. Han viser sætningen, først for voksende, så for aftagende kurver, og således kan sætningen let udvides til at omfatte alle stykvis monotone kurver. Givet at Barrow, ligesom Descartes, Galilei og Newton betragtede gangbare kurver som de, der er frembragt ved kontinuert bevægelse, har han hermed medtaget alle kurver, man dengang arbejdede med.

I *On tangents and areas* benytter Barrow to vigtige redskaber, der muliggør hans indsigt i sammenhængen mellem tangenter og arealer. Det ene er hans $VD$-akse, der danner en fælles ramme for de to kurver, således at de kan analyseres i forhold til hinanden. Her fremgår betydningen af specielt Descartes' analytiske geometri og indførsel af referenceakser for udviklingen af funktionsanalysen.

Det andet er den geniale konstruktion af arealkurven $VIF$. Her introduceres linjestykket $R$, så Barrow forbliver tro over for homogenitetsloven, da det ellers er et lovbrud at beskrive arealer ved kurver. Idéen til konstruktionen af denne arealkurve må nok tilskrives Hendrick van Heuraet (1634-1660?), idet Barrow givetvis på sine rejser i Europa havde studeret dennes velkendte værk *De transmutatione curvarum linearum in rectas* (udgivet 1659) (Katz, s. 534). Van Heuraets idé var at benytte arealet under en konstrueret kurve til at finde et kurvestykkes længde, en idé som James Gregory (1638-1675) videreudviklede. Barrows gennembrud består i, at han abstraherede fra denne sammenhæng og specifikt undersøgte arealkurvens tangenter.

# 7 Diskussion

## 7.1 Geometri versus algebra

Som vi har set igennem det forrige, omhandlede tangentbestemmelse i 1600-tallet det at konstruere en tangent til et givet punkt på en kurve. Når man derimod i dag taler om tangenter, taler man typisk om en ret linie, der "rører" en given graf i et bestemt punkt, og det at bestemme en given tangent bliver ofte kædet sammen med at finde hældningskoefficienten til grafen i et punkt, hvilket også er grundidéen der ligger bag Newton og Leibniz' senere matematik omkring tangentbestemmelse. Når man snakker om at finde hældningskoefficienten til et punkt på en graf, kan det næsten kun gøres algebraisk, hvis man ønsker en generel løsning, da der ellers er for mange muligheder til, at man kan dække dem alle med en generel løsning rent geometrisk. I denne sammenhæng er det derfor naturligt at overveje geometriens og algebraens rolle i udviklingen af Newton og Leibniz' differentialregning. Dette vil vi gøre med udgangspunkt i de behandlede kilder og de personer, der har skrevet dem.

Betragter man både Newton og Leibniz' algebraiske metoder, kan man ikke undgå at se hvor stor betydning indsigten i sammenhængen mellem ligninger og kurver, algebra og geometri, som Descartes og Fermat er fædre til, har. For det første er det centralt, for at opnå den ikke hidtil sete grad af generalitet hos både Newton og Leibniz, at en kurve som udgangspunkt beskrives ved en ligning, der udtrykker sammenhængen mellem to variable størrelser. Kun derved er det muligt at foretage det algebraiske arbejde, der beskriver sammenhængen mellem størrelserne og mellem deres ændringshastigheder (hos Newton fluxioner, hos Leibniz differentialer). Netop derfor kan man hævde, at Fermats tilgang til analytisk geometri står som største forgangsbillede for den analytiske forståelse af kurver, som kom til udtryk i både Newton og Leibniz' differentialregning.

Descartes' metode til at finde en tangent tager udgangspunkt i geometrien, og netop heri ligger hans begrænsende faktor. Han benytter blot algebraen som et middel til at beskrive geometrien, og forsøger derudfra ved geometriske argumenter at forklare sin algebraiske løsning. Således er algebraen underlagt geometrien, og Descartes' tilgang tilslører således den fordel ved at skabe et algebraisk fundament for sin beskrivelse af kurver, der var styrken i Newton og Leibniz' arbejde og ligeledes i vores moderne funktionstankegang.

Fermats tilgang til analytisk geometri, som kommer til udtryk i hans metode til bestemmelse af maksimum og minimum til kurver, tager udgangspunkt i en ligning til beskrivelse af en kurve. Således betones det algebraiske arbejde med variable som det centrale, når man søger tangenter. Ud fra denne synsvinkel er altså Fermats analytiske geometri en mere sandsynlig forgænger for den analytiske forståelse af kurver, som Newton og Leibniz fremviser.

Ud over dette fremgår Fermats indflydelse på differentialregningens udvikling også tydeligt i den algebraiske "adequality"-metode, som præsenteres tidligere i denne tekst. Både Newton og Leibniz arbejder med størrelser, der er så forsvindende små, at de kan regnes med som havende substans, men så til slut alligevel sættes lig med nul (Newtons "$o$" og Leibniz' "$dx$"). Ligesom den geometriske forståelse af uendeligt små størrelser (indivisibler og infinitesimaler) blev grundlagt af Kepler og Galilei – måske helt tilbage af Arkimedes – repræsenterer denne metode en algebraisk forståelse for uendeligt små størrelser. ser man på Descartes' metode til at tegne normaler, og Fermats "adequality"-metode, er det klart, at det er Fermats algebraiske beskrivelse af infinitesimaler – hans "$e$" – der optræder i Newton og Leibniz' differentialregning.

Descartes' metode skal dog ikke forsmås. Selvom han, ligesom Fermat, har at gøre med grænseovergange, formår han at finde en metode, der sniger sig uden om brugen af infinitesimale størrelser i de specifikke beregninger, hvilket er meget elegant i forhold til Fermats mystiske og måske ikke tilstrækkeligt veldefinerede "$e$".

Selvom Fermats analytiske geometri ved diskussionen ovenfor øjensynligt har haft større betydning end Descartes' for udviklingen af differentialregningen, må man dog fremhæve et par vigtige pointer, når det drejer sig om Descartes' bidrag.

For det første: Af de to udviklere af analytisk geometri, er Descartes klart den mest nytænkende, når det drejer sig om algebraisk notation og frigørelse fra den hæmsko, som homogenitetsloven udgør for samarbejdet mellem algebra og geometri. Descartes' arbejde åbnede op for den frihed, der er behov for, hvis algebraen og analysens potentiale skulle kunne udnyttes fuldt fremover.

For det andet: Descartes' *La Geometrie* var et forsøg på at beskrive den matematiske brug af hans generelle videnskabelige metode (Katz, s. 478). På samme måde som det kan hævdes, at Blaise Pascals forsvar af metoden med indivisibler for hans tids matematikere udgjorde et vigtigt skub imod fremtidens matematik og udvikling af matematisk tankevirksomhed som generelt begreb (Child, s. 2), kan man anskue Descartes' rolle som vigtig udvikler af den generelle forståelse af analyse som matematisk redskab.

I ovenstående beskrives, hvorledes den algebraiske tilgang til kurver er det væsentligste i det effektive beregningsredskab som differential- og integralregningen udgør. Men har den geometriske tilgang så været en direkte forhindring for udviklingen af differentialregningen? For at svare på dette, kan vi starte med at betragte Descartes, hvis begrænsning vi ovenfor antydede, netop var hans geometriske udgangspunkt.

Ser vi dernæst på Roberval, er det ikke sandsynligt, at han selv tillagde sine geometriske argumenter nogen algebraisk betydning à la Descartes. I hans *Afhandling om indivisibler*, hvori han bestemmer arealet under en parabel, beskæftiger han sig udelukkende med forhold mellem længder i stil med Euklid (Roberval, s. 82-83) og tager sin inspiration fra Arkimedes i hans opdeling af en plan figur i linjer.Hverken parablen eller hans resultat, som i moderne notation kunne opskrives

$$1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{2}{3},$$

gives nogen algebraisk forskrift. Robervals metode appellerer altså primært til det “intuitive”, men der bliver ikke givet noget algebraisk grundlag. Måske som konsekvens af dette, arbejder Roberval kun med specifikke tilfælde af kurver og tangenttegning samt arealbestemmelse til disse. Men hvis geometrien er sådan en hæmsko for generelle resultater og algebraiske metoder, må man dog med forundring betragte Barrow, som udledte sine resultater om tangenter og arealer næsten udelukkende geometrisk (Katz, s. 539). Som det kan ses i Barrows arbejde beskrevet tidligere i denne tekst, holder han endda homogenitetsloven i agt. Han formår ud fra et geometrisk udgangspunkt at indse analysens fundamentalsætning samt at udlede utallige resultater, hvis analytiske ækvivalenser udgør en stor del af Newton og Leibniz' resultater (Child, s. 12).

Hvor meget Barrows arbejde end viser, hvorledes geometrisk tankegang kan åbne mange af de samme døre som differentialregningen, må man dog nok konkludere, at det er afgrænset fra at nå den enorme grad af matematisk indsigt, udviklet over de næste par århundreder, som differentialregningens analytiske udgangspunkt åbnede op for.

## 7.2 Kinematikkens rolle i differentialregningen

Newton beskriver i sin *Treatise on the Methods of Series and Fluxions* (1671) grundlaget for hans differentialregning med fluenter og fluxioner. Her beskriver han, hvorledes fluenter er variable størrelser, der ændrer sig ved tidens kontinuerte gang, og fluxioner den hastighed, afhængig af tiden, med hvilken fluenterne ændrer sig. Således bygger Newtons forståelse af kurver på, at det er sporet af en partikel i bevægelse, og hastigheden, hvormed dette spor udvider sig, er et helt essentielt begreb. Newtons idé stammer oprindeligt fra Galilei i denne forbindelse, om end Galilei i sin teori er strengere bundet af geometrien, med hvilken han beviser sine sætninger.

Som allerede nævnt i afsnittet om hans metode, benytter Roberval sig tillige udelukkende af geometriske argumenter, hvori han bruger viden fra kinematikken, dog med den innovative indfaldsvinkel, at momentane hastigheder også kan undersøges med denne viden. Dette ses umiddelbart at være i forlængelse af Galileis bevisteknik, da Galilei også benyttede uendeligt små størrelser i mange af sine beviser, i strid med de klassiske græske begreber (Katz, s. 459).

Anvendeligheden af Robervals metode er dog begrænset til de kurver, der har en konkret bevægelsesbeskrivelse i samme tilfælde som cykloiden, hvor vi altså forbinder kurven til et punkts bevægelse over et tidsrum, men metoden virker altså på disse. Robervals opfattelse af kurver og tangenter kan hermed også ses i Newtons fluenter og fluxioner, idet de sidstnævnte kan ses som en konkret værdi til Robervals tangent, der på sin vis illustrerer hastigheden af kurvens genererende bevægelse i et punkt (Katz, s. 550). Vi møder tillige Roberval i vores regning med hastighedsvektorer, hvor hastigheder både har en konkret størrelse og retning; i vores anskuelse af grafer for funktioner ser vi også ofte en graf som resultat af en genererende bevægelse i stil med Robervals, hvor vi bevæger os langs $x$-aksen med en fast hastighed, imens vi laver en anden bevægelse langs $y$-aksen.

På baggrund af dette er det altså klart, at Robervals tankegang, om at betragte kurver som bevægelsesspor, har haft en enorm betydning for den videre udvikling af differentialregningen. Samtidig har den også lagt op til mange fortolkninger af kurver, heriblandt specielt tangenter som momentane hastigheder osv. Det skal indskydes, at Roberval også i forhold til Galilei foretog en større "generalisering" af bevægelsesbegrebet i form af mere nuancerede kurver end de få, som Galilei havde beskæftiget sig med i sin fysiske matematik.

## 7.3 De sidste skridt imod differentialregningen

Vi har nu diskuteret, hvorledes Fermat, Descartes, Roberval og Barrows arbejde hjalp til med at bygge det fundament op, som Newton og Leibniz havde brug for til at udvikle differentialregningen. Et relevant spørgsmål opstår således: På hvilke områder adskilte arbejdet af Newton og Leibniz sig fra det, de fire og andre havde udført, således at de var i stand til at tage skridtet fuldt ud og færdigbygge differentialregningen?

Newton finder sit udgangspunkt i bevægelseslæren, som Roberval og Galilei havde arbejdet med. Til forskel fra disse, formår han at kombinere det med Descartes og Fermats analytiske geometri, hvorved han kan opbygge de tilstrækkeligt stort algebraiske fundament i definitionen af fluenter og fluxioner. Leibniz får sin idé til differentialregningen ved at betragte de geometriske ækvivalenser til aritmetiske differenser og summer, hvilket må siges at være en nyskabende og elegant idé. Men efter han har defineret sine differentialer (og uendelige summer, $\int$), tager hans videre arbejde udgangspunkt i differentialtrekanten, som han havde set hos Pascal og muligvis også hos Barrow (Katz, s. 568).

En stor del af styrken i både Newton og Leibniz' metoder ligger i de relativt simple algoritmer, der ud fra definitionsgrundlaget fluenter og fluxioner henholdsvis differentialer, gør tangent- og arealberegninger så overskuelige. Man kan sige, at både Fermat og Descartes opfandt innovative algoritmer til dette, men deres styrke henlå latent, især hos Descartes' algoritme, da det algebraiske arbejde blev for omfattende. Det store skridt videre, der bliver taget imellem Descartes samt Fermat, og Newton samt Leibniz, er simplificeringen af disse algoritmer, der bliver udarbejdet af Hudde og Sluse.

Ligesom studiet af mange eksempler kan lede én frem til et fyldestgørende bevis, kan man betragte Barrows arbejde, samt Gregorys, som en eksemplificering af mange af de resultater, der kan findes i arbejdet med tangenter og arealer, herunder specielt analysens fundamentalsætning. Specielt for Newton, som givetvis læste begge personers arbejde, kan man forestille sig, at det fremstår som en udfoldelse af den matematiske verden, der ligger åben, når bare man finder den rette tilgang til problemet.

Og hvad er så den rette tilgang til problemet? I betragtning af ovenstående, kan man ane, hvad det var Newton og Leibniz havde, som gjorde, at netop de blev opfinderne af differentialregning. Uanset rollen af den inspiration fra Roberval, Fermat, Descartes og Barrow, der udgøres af analytisk tankegang, algebraiske algoritmer, kinematisk udgangspunkt, differentialtrekanter eller indsigt i analysens fundamentalsætning, gør Newton og Leibniz begge et enormt fremskridt, der sætter dem i spidsen: Den grundlæggende definition af variable størrelsers ændringer som variable selv, Newtons fluxioner og Leibniz' differentialer, er netop det udgangspunkt, der tillader Newton og Leibniz at kunne benytte tidligere matematikeres idéer til at udfolde differentialregningen.

Set i perspektiv giver Euklids aksiomer og definitioner det grundlag, der skal til for at man kan opnå indsigt i den klassiske geometris sammenhænge, og således indleder Euklid en ny æra i matematikkens forståelse af former og figurer. På samme måde kan man sige, at Newton og Leibniz' metode til at betragte variable størrelser, hvad enten man bruger tiden som begrundelsesgrundlag eller ej, skaber det fundament, der skal til for at udnytte det fulde potentiale af tidligere matematikeres idéer og deres resultater, samt at tage et spring ud i fremtidens forståelse af kurver.

# 8 Konklusion

Leibniz og Newton bidrog begge til matematikken med monumentale og revolutionerende idéer, men det problem de løste var ikke uberørt: Det foregående århundrede før Newton og Leibniz havde set mange matematikere løse problemer tæt knyttet til differentialregningen. Selvom de ikke opererede med et fuldgyldigt differentialregningsbegreb, og ikke havde en så udviklet teori til at understøtte deres arbejde med uendelighed, må det dog stadig siges, at deres idéer og koncepter må have haft en væsentligt indflydelse på Newton og Leibniz' udvikling af differentialregningen.

Inspireret af især de græske idealer var fremgangsmåden overvejende geometrisk: Selvom Descartes og Fermats analytiske geometri var hjørnestenen i deres resultater, benyttede de sig i almindelighed stadigvæk af geometriske tankegange og argumenter, når det kom til problemløsning og bevisførelse. Det er dog uden for enhver tvivl, at en af årsagerne til at differentialregningen overhovedet kunne opfindes var, at adskillelsen af størrelser og tal var blevet gradvist udvisket gennem den videnskabelige revolution, og ikke mindst, at man havde løsnet op for de strenge græske anvisninger mod brug af uendelighed. Dette gjorde, at man i langt højere grad kunne udvikle algebraen end tidligere, da man nu ikke stødte på samme åbenlyse problemer, som f.eks. homogenitetsloven. Ved denne udvikling kunne man opnå en langt højere generalitet i beskrivelsen af kurver, da disse nu direkte kunne oversættes til algebra. På denne måde kunne man undgå de specifikke geometriske tilfælde, som før havde været forklaringsgrundlag for matematiske metoder.

Endvidere er det også klart, at selve betragtningen af kurver som spor af en bevægelse, har haft væsentlig indflydelse på specielt Newtons differentialregning. Selvom dette syn på kurver stammer fra langt tilbage, er det specielt blevet "forstærket" af Robervals tilgang til matematik omkring kurver, og det kan derfor let argumenteres for, at Newton, om ikke andet, så må være inspireret af Robervals matematik.

For at opsummere, kan det altså siges, at Newton og Leibniz begge klart har været forløbere i udviklingen af differentialregningen, men at de begge har udviklet deres respektive teorier med et solidt fundament i baghånden i form af Fermat, Descartes, Roberval, Barrow osv. Det er endvidere bemærkelsesværdigt, at Newton og Leibniz på samme tid har udviklet to så forholdsvis ens teorier, hvilket yderligere er med til at forstærke argumentet for at Fermat, Descartes, Roberval og Barrow har haft en enorm indflydelse på den daværende matematik. Man kan alt i alt sige, at de gjorde matematikken "moden" til de nye fremskridt, som uomgængeligt måtte komme i form af differentialregningen.

## Litteratur

Isaac Barrow. *On Areas and Tangents.* John Fauvel & Jeremy Gray: The History of Mathematics. A Reader. Macmillan, 1987.

James Mark Child. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow.* Cosimo Classics, New York, 2008.

Pierre de Fermat. *On a Method for the Evaluation of Maxima and Minima.* Roland Calinger: Classics of Mathematics. Prentice Hall, 1995.

Gilles Personne de Roberval. *The Cycloid.* Dirk J. Struik: A Sourcebook in Mathematics. Harvard University Press, 1969.

Gilles Personne de Roberval. *Afhandling om indivisibler.* Jesper Lützen og Kurt Ramskov: Kilder til matematikkens historie. Matematisk afdeling, Københavns Universitet, 1999.

René Descartes. *Rules for Direction of the Mind.* Robert Maynard Hutchins (ed.): Great Books of the Western World. The University of Chicago: Encyclopedia Britannica, Inc., 1952.

René Descartes. *The Method of Normals.* John Fauvel & Jeremy Gray: The History of Mathematics. A Reader. Macmillan, 1987.

Howard Eves. *Great Moments in Mathematics.* Mathematical Association of America, 1981.

Charles Henry Edwards Jr. *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag New York Inc., 1979.

Victor J. Katz. *A History of Mathematics: an Introduction.* Addison-Wesley Educational Publishers, Inc. Third edition, 2009.

Randall Patrick Munroe. *Newton and Leibniz.* http://xkcd.com/626/ (forsidebillede).

George Polya. *Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Volume I.* John Wiley and Sons, 1926.