Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

3. og 6. september 2013

Gennemgå bevis for Sætning 2.10

Sætning 1. *For alle mængder X gælder $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.*

Bevis. Der findes en injektion $X \to \mathcal{P}(X)$, fx givet ved $x \mapsto \{x\}$. Lad $g\colon X \to \mathcal{P}(X)$ være en injektion, og lad $B \subseteq X$ være givet ved

$$B = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}.$$

Da vil $B \in \mathcal{P}(X)$. Hvis der fandtes $y \in X$ så $g(y) = B$, ville $y \in B$ hvis og kun hvis $y \notin g(y) = B$, en modstrid. Altså kan g ikke være surjektiv, og der findes ingen bijektion $X \to \mathcal{P}(X)$. □

Supplerende opgave 1

Genopfrisk definitionen af følgende begreber fra metriske rum.

Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad $A \subseteq M$ være en fast delmængde.

(i)

Åbne og lukkede (afsluttede) delmængder af et metrisk rum.

Vi siger, at A er *åben* hvis der gælder for alle $a \in A$, at der findes $r > 0$ således at

$$K(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subseteq A.$$

Et punkt $x \in M$ kaldes et *kontaktpunkt* for A, hvis der gælder for alle $r > 0$ at $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Vi siger, at A er *afsluttet* hvis den indeholder alle sine kontaktpunkter.

(ii)

Afslutningen og det indre af en vilkårlig delmængde af et metrisk rum.

Afslutningen af $A \subseteq M$ er mængden af alle kontaktpunkter for A og betegnes $\overline{A}$. Vi lærte i Analyse 1, at $\overline{A}$ består af alle grænsepunkter for konvergente følger med elementer i A. Det indre A° af A er mængden af *indre punkter* for A, altså de punkter $a \in A$ hvortil der findes et $r > 0$ således at $K(a, r) \subseteq A$. Vi har dermed, at $A = \overline{A}$ hvis og kun hvis A er afsluttet (pr. definition), og at $A^\circ = A$ hvis og kun hvis A er åben (også pr. definition).

(iii)

En tæt delmængde af et metrisk rum.

A er *tæt* i (M, d), hvis der gælder $\overline{A} = M$.

(iv)

Konvergent følge og Cauchy følge i metriske rum. Fortætningspunkt for en følge i et metrisk rum.

Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af elementer i (M,d). Vi siger, at $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer* imod $a \in M$, hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ således at $d(x_n, a) < \varepsilon$ når $n \geq N$ (og dermed, at følgen (x_n) er *konvergent* med *grænsepunkt* a). Vi skriver da, at

$$x_n \to a \text{ for } n \to \infty.$$

Følgen (x_n) kaldes en *Cauchy-følge* hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ således at $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ når $n, m \geq N$.

Et punkt $a \in M$ kaldes et *fortætningspunkt* for følgen $(x_n)_{n\geq 1}$, hvis der for en kugle omkring a findes uendeligt mange elementer fra følgen. Mere formelt skal der for ethvert $r > 0$ gælde, at $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a,r)\}$ er en uendelig delmængde af $\mathbb{N}$. En ækvivalent definition er, at der findes en konvergent delfølge af $(x_n)_{n\geq 1}$ med a som grænsepunkt.

(v)

Fuldstændigt metrisk rum. Kompakt metrisk rum.

Et metrisk rum (M,d) er *fuldstændigt*, hvis enhver Cauchy-følge i (M,d) er konvergent. Rummet (M,d) er *kompakt*, hvis enhver følge har et fortætningspunkt, eller ækvivalent, at enhver følge har en konvergent delfølge.

(vi)

Kontinuert afbildning mellem to metriske rum.

Lad (N,d') være et andet metrisk rum, og lad $f\colon M \to N$ være en afbildning. Vi siger, at f er *kontinuert i et punkt* $x \in M$, hvis der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ således at $f(K(x,\delta)) \subseteq K(f(x),\varepsilon)$. Med andre ord: hvis $y \in K(x,\delta)$ (dvs. $d(x,y) < \delta$) skal $f(y) \in K(f(x),\varepsilon)$ (dvs. $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$). Afbildningen f kaldes *kontinuert* hvis f er kontinuert i alle punkter $x \in M$.

En ækvivalent formulering (der er bedre fra et topologisk perspektiv) er følgende: $f\colon (M,d) \to (N,d')$ er kontinuert, hvis der for enhver åben delmængde $B \subseteq N$ gælder, at urbilledet $f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ er en åben delmængde af M.

Supplerende opgave 2

Afgør hvike af nedenstående udsag er sande hhv. falske. Giv et lille argument for din konklusion f.eks. i form af en henvisning til en sætning, et modeksempel eller lignende.

(i)

Enhver delmængde af en metrisk rum er enten åben eller afsluttet.

Dette er noget vrøvl. Delmængden $[0,1)$ af $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik er hverken åben eller afsluttet.

(ii)

Intervallet $[0,1]$ er foreningen af tælleligt mange åbne delmængder af $\mathbb{R}$.

Også noget vrøvl. Foreningen af tælleligt mange (og vilkårligt mange) åbne delmængder er åben, men $[0,1]$ er ikke åben (i den sædvanlige metrik), da fx 0 ikke er et indre punkt.

(iii)

Intervallet $[0,1]$ er fællesmængden af tælleligt mange åbne delmængder af $\mathbb{R}$.

Dette er imidlertid sandt: lad $A_n = (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$. Da er A_n åben for alle n, og $[0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(iv)

Hvis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i et metrisk rum (X,d) og hvis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ har et fortætningspunkt $x_0 \in X$, da vil $x_n \to x_0$.

Dette er også sandt. Lad $\varepsilon > 0$. Da findes $N \in \mathbb{N}$ således at $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $n, m \geq N$. Da $x_0 \in \mathbb{N}$ vil uendeligt mange punkter x_n opfylde $x_n \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Hvis $n \geq N$, findes et $m \geq n$ således at

$$x_m \in K\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ellers ville der nemlig gælde at $x_m \notin K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ for *alle* $m \geq n$, hvilket strider imod, at x_0 er et fortætningspunkt, da $x_m \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ så kun ville gælde for endeligt mange x_m. Dermed vil

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

så $x_n \to x_0$ for $n \to \infty$.

(v)

Ethvert fuldstændigt metrisk rum er kompakt.

Dette er falsk. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ er fuldstændigt, men ikke kompakt, da fx følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med $x_n = n$ ikke har en konvergent delfølge. Vi ved også, at kompakte rum er begrænsede, hvilket $\mathbb{R}$ ikke er.

(vi)

Ethvert kompakt metrisk rum er fuldstændigt.

Dette er imidlertid sandt. Lad (x_n) være en Cauchy-følge i (M,d), og lad (x_{n_p}) være en konvergent delfølge af (x_n) med grænsepunkt x_0. For $\varepsilon > 0$ findes $N_1 \in \mathbb{N}$ således at $d(x_{n_p}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ for $p \geq N_1$. Endvidere findes $N_2 \in \mathbb{N}$ så $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n, m \geq N_2$. Sæt $N = \max\{N_1, N_2\}$. For $m \geq N$ vil $m \geq N_1$, hvormed $d(x_{n_m}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $n_m \geq m \geq N_2$, vil også gælde, at $d(x_m, x_{n_m}) < \frac{\varepsilon}{2}$, så

$$d(x_m, x_0) \leq d(x_m, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

så $x_n \to x_0$ for $n \to \infty$.

(vii)

Hvis X er et metrisk rum med endeligt mange elementer, så er X kompakt.

Dette er sandt. Lad (x_n) være en følge i X. Vi skal vise, at (x_n) har et fortætningspunkt. Lad $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ være en nummerering af punkterne i X. Lad

$$N_i = \{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n = a_i\}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Da må $\bigcup_{i=1}^{m} N_i = \mathbb{N}$, så mindst én N_i må være uendelig (ellers var $\mathbb{N}$ endelig... bøvs) for et $i \in \{1, \ldots, m\}$. Lad i være et sådant. Da vil for alle $r > 0$ gælde, at

$$N_i = \{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n = a_i\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in K(a_i, r)\}.$$

Dermed må sidste mængde være uendelig, så a_i er et fortætningspunkt for (x_n).

(viii)

Hvis X er et metrisk rum og hvis der om $A \subseteq B \subseteq X$ gælder, at A er tæt i B og B er tæt i X, da er A tæt i X.

Dette er sandt. Vi har, at $\overline{A} = B$ og at $\overline{B} = X$, og skal vise, at $\overline{A} = X$. Vi har trivielt "$\subseteq$", så lad os vise "$\supseteq$": Lad $x \in X$ og $r > 0$ være givet. Vi skal vise, at $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Da $K(x, \frac{r}{2}) \cap B \neq \emptyset$, findes $y \in B$ så $d(x,y) < \frac{r}{2}$. Da $K(y, \frac{r}{2}) \cap A \neq \emptyset$, findes $z \in A$ så $d(y,z) < \frac{r}{2}$. Dermed vil

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r,$$

så $z \in A$ og $z \in K(x,r)$, hvormed vi har det ønskede.

(ix)

Hvis X er et metrisk rum, og hvis A og B er tætte delmængder af X, da er $A \cap B$ en tæt delmængde af X.

Dette er falsk. Tag fx $X = \mathbb{R}$ og lad $A = \mathbb{Q}$ og $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Da vil A og B være tætte i X, men $A \cap B = \emptyset$ er ikke tæt i $\mathbb{R}$.

(x)

Hvis X er et metrisk rum, og hvis A og B er åbne tætte delmængder af X, da er $A \cap B$ en tæt delmængde af X.

Dette er sandt (det følger bl.a. af Baires sætning, som vi viste i Analyse 1). Tag $x \in X$ og lad $r > 0$. Da er $K(x,r) \cap A$ åben og ikke-tom (da A er tæt i X), så der findes $y \in K(x,r) \cap A$ og $r' > 0$ således at $K(y,r') \subseteq K(x,r) \cap A$. Der findes nu et $z \in B$ således at $z \in K(y,r')$ (da B er tæt), hvormed

$$z \in K(y,r') \cap B \subseteq (K(x,r) \cap A) \cap B = K(x,r) \cap (A \cap B).$$

Altså er $K(x,r) \cap (A \cap B)$ ikke tom, hvormed $A \cap B$ er tæt i X.

(xi)

Hvis X og Y er metriske rum og $f \colon X \to Y$ er kontinuert, da gælder:

(a) X er kompakt $\Rightarrow$ $f(X)$ er kompakt.

Dette er sandt. Lad (y_n) være en følge i $f(X)$. Da findes $x_n \in X$ for hvert n så $f(x_n) = y_n$. Da X er kompakt, har (x_n) en konvergent delfølge (x_{n_p}) med grænsepunkt $x_0 \in X$. Da f er kontinuert, vil $y_{n_p} = f(x_{n_p}) \to f(x_0)$ (dette ved vi fra Analyse 1), så (y_n) har altså en konvergent delfølge. Dermed er $f(X)$ kompakt.

(b) Y er kompakt $\Rightarrow$ $f^{-1}(Y)$ er kompakt.

Dette gælder ikke. Hvis $Y = \{a\}$ og $X = \mathbb{R}$, og vi definerer $f(x) = a$ for alle $x \in \mathbb{R}$, vil f være kontinuert og Y være kompakt, men $\mathbb{R} = f^{-1}(Y)$ er ikke kompakt.

(c) X er fuldstændig $\Rightarrow$ $f(X)$ er fuldstændig.

Dette gælder ikke. Hvis $X = \mathbb{R}$ og $Y = \mathbb{R}$ og vi definerer $f(x) = \arctan(x)$, vil f være kontinuert og X være fuldstændig, men $f(X) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ er ikke fuldstændig (da den ikke er afsluttet).

(d) $A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dette er sandt. Hvis $x \in \overline{A}$, skal vi vise, at $f(x) \in \overline{f(A)}$. Lad derfor $r > 0$ og definér

$$U = K(f(x), r) \subseteq Y.$$

Da U er åben, vil $f^{-1}(U)$ være åben. Da $f(x) \in U$, vil $x \in f^{-1}(U)$, så der findes $s > 0$ så $K(x,s) \subseteq f^{-1}(U)$. Da $x \in \overline{A}$, vil nu gælde, at $K(x,s) \cap A$ er ikke-tom. Tag derfor $y \in K(x,s) \cap A$. Da vil $f(y) \in f(A)$ og

$$y \in K(x,s) \subseteq f^{-1}(U),$$

hvormed $f(y) \in U$. Altså vil $f(y) \in U \cap f(A)$, så $U \cap f(A) = K(f(x),r) \cap f(A)$ er ikke-tom, hvormed $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(e) $A \subseteq X \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Dette gælder ikke. Lad $X = \mathbb{R}$ og $Y = \mathbb{R}$ og definér $f(x) = \arctan(x)$. Hvis $A = \mathbb{R}$, vil $f(\overline{A}) = f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, men $\overline{f(A)} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Bemærk, at hvis vi havde restringeret Y til $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ville f være en homeomorfi.)

Supplerende opgave 3 (ii) og (iii)

(ii)

Vis, at mængden $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 < 0\}$ er overtællelig ("uncountable").

Vi indser hurtigt, at rødderne til $x^2 - 3x + 2$ er 1 og 2, hvormed $B = (1, 2)$ (vi har fx, at $x^2 - 3x + 2$ er voksende på $[\frac{3}{2}, \infty)$ og aftagende på $(-\infty, \frac{3}{2}])$. Afbildningen $g\colon (0,1) \to B$ givet ved $g(x) = x + 1$ er bijektiv, så $\#B = \#(0,1)$. Hvis der fandtes en injektiv afbildning $h\colon B \to \mathbb{N}$, ville $h \circ g\colon (0,1) \to \mathbb{N}$ også være injektiv (se Opgave 2.8 længere nede), i modstrid med Theorem 2.7.

(iii)

Vis, at mængden $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + (n-1)x - n = 0 \text{ for et eller andet } n \in \mathbb{N}\}$ er tællelig.

Bemærk først, at

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + (n-1)x - n = 0\}.$$

Rødderne for $x^2 + (n-1)x - n$ i x er 1 og $-n$, så definerer vi $A_n = \{1, -n\}$ for $n \in \mathbb{N}$, har vi at

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Det følger da af Theorem 2.6, at C er tællelig, da C er en tællelig forening af endelige (og dermed tællelige) mængder.

1.1

Se bogen for tegninger.

Problemet er her, at de to "trekanter" i virkeligheden ikke er trekanter. Vi har to trekanter, navnlig en trekant med målene 2×5 og en med målene 3×8. Deres hypotenuser har ikke samme hældning ($\frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$), og hvis vi placerer figuren med det større areal oven på den med det mindre, finder vi, at vi får en lille stribe henover den mindre, hvis areal netop er 1 (arealet af den lille firkant).

2.1

(Vi behøver ikke at besvare alle delspørgsmål i denne opgave.)

Lad $A, B, C \subseteq X$ være mængder. Vis, at

(i)

$A \setminus B = A \cap B^c$.

Vi har for alle $x \in X$, at

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ og } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ og } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c.$$

(ii)

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Vi har

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C^c = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A \setminus (B \cup C)$$

som følge af (i) og de Morgans love.

(iii)

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Vi har

$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup (C^c)^c) = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

som følge af (i), de Morgans og de distributive love.

(iv)

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Vi har

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

som følge af (i), de Morgans og de distributive love.

(v)

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Vi har

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

som følge af (i) og de Morgans love.

2.2

Lad $A, B, C \subseteq X$. Den *symmetriske differens* af A og B defineres som $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Vis, at

$$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \triangle B) \cup (B \triangle C).$$

Bemærk først, at

$$\begin{aligned} A \cap (A \cap B \cap C)^c &= A \cap (A^c \cup B^c \cup C^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (A \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cup C^c) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

Tilsvarende gælder $B \cap (A \cap B \cap C)^c = (B \setminus A) \cup (B \setminus C)$ osv. Derfor vil

$$\begin{aligned} (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) &= (A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^c \\ &= [A \cap (A \cap B \cap C)^c] \cup [B \cap (A \cap B \cap C)^c] \cup [C \cap (A \cap B \cap C)^c] \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Vi har, at

$A \setminus C = (A \cap C^c) \cap (B \cup B^c) = (A \cap C^c \cap B) \cup (A \cap C^c \cap B^c) \subseteq (B \cap C^c) \cup (A \cap B^c) = (B \setminus C) \cup (A \setminus B)$

og tilsvarende $C \setminus A \subseteq (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$, så vi får

$$\begin{aligned} (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \\ &= (A \triangle B) \cup (B \triangle C), \end{aligned}$$

som ønsket.

2.3

Vis de Morgans love (2.2) og (2.3).

Vi nøjes med at vise (2.3), da denne klart medfører (2.2). Lad $(A_i)_{i\in I}$ være en familie af delmængder af X. Da vil

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$$

for ethvert $x \in X$. Sidste gælder hvis og kun hvis $x \notin A_i$ for alle $i \in I$, thi ellers ville $x \in A_i$ for et eller andet i og dermed $x \in \bigcup_i A_i$. Altså har vi

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin A_i \text{ for alle } i \in I \Leftrightarrow x \in A_i^c \text{ for alle } i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c.$$

Tilsvarende vil $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$ hvis og kun hvis der findes et $i \in I$ så $x \notin A_i$, thi ellers ville $x \in A_i$ for alle i og dermed $x \in \bigcap_i A_i$. Altså vil

$$x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin A_i \text{ for et eller andet } i \in I \Leftrightarrow x \in A_i^c \text{ for et eller andet } i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

2.4

(i)

Find eksempler som illustrerer, at $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ og $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$. I begge relationer gælder en inklusion "$\subseteq$" eller "$\supseteq$" altid; hvilken?

Definér $f\colon \{1,2\} \to \{1\}$ ved $f(1) = f(2) = 1$, og definér $A = \{1\} \subseteq \{1,2\}$ og $B = \{2\} \subseteq \{1,2\}$. Da vil $A \cap B = \emptyset$, så $f(A \cap B) = \emptyset$. Imidlertid vil $f(A) \cap f(B) = \{1\}$. Dette antyder, at

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

gælder (jf. den ledende formulering), og det er da også rigtigt: hvis $y \in f(A \cap B)$ for delmængder $A, B \subseteq X$ og $f\colon X \to Y$, findes $x \in A \cap B$ så $f(x) = y$. Da vil $y = f(x) \in f(A)$ og $y = f(x) \in f(B)$, så $y \in f(A) \cap f(B)$.

Benytter vi den samme funktion og samme mængder, ser vi, at $A \setminus B = \{1\}$, så $f(A \setminus B) = \{1\}$. Imidlertid vil $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$. Man kunne derfor skyde på, at

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$$

gælder, og det gør det! Hvis $y \in f(A) \setminus f(B)$, findes $x \in A$ så $y = f(x)$. Hvis der også gjaldt, at $x \in B$, ville $y = f(x) \in f(B)$, hvilket strider imod antagelsen, så $x \in A \setminus B$, hvormed $y = f(x) \in f(A \setminus B)$.

(ii)

Vis for en funktion $f\colon X \to Y$ og delmængder $C, D, (C_i)_{i\in I} \subseteq Y$, at

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D).$$

Vi har, at

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} C_i \\
&\Leftrightarrow f(x) \in C_i \text{ for et eller andet } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C_i) \text{ for et eller andet } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i),
\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} C_i \\
&\Leftrightarrow f(x) \in C_i \text{ for alle } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C_i) \text{ for alle } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(C_i)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Leftrightarrow f(x) \in C \setminus D \\
&\Leftrightarrow f(x) \in C \text{ og } f(x) \notin D \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ og } x \notin f^{-1}(D) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D).
\end{aligned}$$

2.5

(Vi behøver ikke at besvare alle delspørgsmål i denne opgave.) *Indikatorfunktionen* for en mængde $A \subseteq X$ er defineret ved

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{hvis } x \notin A. \end{cases}$$

Bemærk derfor for $x \in X$ at $x \in A$ hvis og kun hvis $1_A(x) = 1$. Vis, at

(i)

$1_{A \cap B} = 1_A 1_B$.

Vi har for $x \in X$, at

$$1_{A\cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ og } x \in B \Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \text{ og } 1_B(x) = 1 \Leftrightarrow 1_A(x)1_B(x) = 1,$$

da $1_A(x)1_B(x) = 1$ medfører, at hverken $1_A(x) = 0$ eller $1_B(x) = 0$.

(ii)

$1_{A \cup B} = \min\{1_A + 1_B, 1\}$.

Bemærk først, at

$$A \cup B = (A \cap B) \dot\cup (A \setminus B) \dot\cup (B \setminus A).$$

X er derfor en disjunkt forening af mængderne $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ og $(A \cup B)^c$. Hvis x ligger i en af de tre første, vil $1_{A\cup B}(x) = 1$. Vi har også, at

- hvis $x \in A \cap B$, vil $1_A(x) + 1_B(x) = 2$, så $\min\{1_A(x) + 1_B(x), 1\} = 1$;
- hvis $x \in A \setminus B$, vil $1_A(x) + 1_B(x) = 1$, så $\min\{1_A(x) + 1_B(x), 1\} = 1$;
- hvis $x \in B \setminus A$, vil $1_A(x) + 1_B(x) = 1$, så $\min\{1_A(x) + 1_B(x), 1\} = 1$.

Altså vil $1_{A\cup B}(x) = \min\{1_A(x) + 1_B(x), 1\}$ for $x \in A \cup B$. Hvis $x \notin A \cup B$, vil $x \in A^c \cap B^c$ (de Morgans love), så $1_{A\cup B}(x) = 0$, og $1_A(x) + 1_B(x) = 0$, hvormed $\min\{1_A(x) + 1_B(x), 1\} = 0$. Altså slutter vi den ønskede lighed.

(iii)

$1_{A\setminus B} = 1_A - 1_{A\cap B}$.

Lad os vise for disjunkte delmængder $C, D \subseteq X$, at $1_{C\cup D} = 1_C + 1_D$. Vi har, at $1_C(x) + 1_D(x) \neq 2$ for alle $x \in X$, thi lighed for et x ville medføre, at $1_C(x) = 1_D(x) = 1$, hvormed $x \in C \cap D$ (hvilket er umuligt). Altså må $1_C + 1_D \leq 1$, hvormed

$$1_{C\cup D} = \min\{1_C + 1_D, 1\} = 1_C + 1_D$$

jf. (ii). Da $A \setminus B$ og $A \cap B$ er disjunkte med forening A, vil $1_{A\setminus B} + 1_{A\cap B} = 1_A$, som ønsket.

(iv)

$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$.

B og $A \setminus B$ er disjunkte med forening $A \cup B$. Derfor vil

$$1_{A\cup B} = 1_B + 1_{A\setminus B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}.$$

(v)

$1_{A\cup B} = \max\{1_A, 1_B\}$.

Vi har for $x \in X$, at $\max\{1_A(x), 1_B(x)\} = 1$ hvis og kun hvis enten $1_A(x) = 1$ eller $1_B(x) = 1$, dvs. hvis og kun hvis $x \in A$ eller $x \in B$ og altså hvis og kun hvis $x \in A \cup B$.

(vi)

$1_{A\cap B} = \min\{1_A, 1_B\}$.

Vi har for $x \in X$, at $\min\{1_A(x), 1_B(x)\} = 1$ hvis og kun hvis både $1_A(x) = 1$ og $1_B(x) = 1$, dvs. hvis og kun hvis $x \in A \cap B$.

2.6 (i) og (ii)

Lad $A, B, C \subseteq X$ og lad $A \triangle B$ betegne den symmetriske differens som i Opgave 2.2. Vis, at

(i)

$1_{A\triangle B} = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B = 1_A + 1_B \pmod 2$.

Vi har jf. Opgave 2.5 (iv), (iii) og (i), at

$$1_{A\triangle B} = 1_{A\setminus B} + 1_{B\setminus A} - 1_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} = 1_{A\setminus B} + 1_{B\setminus A} = 1_A - 1_{A\cap B} + 1_B - 1_{B\cap A} = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B,$$

da $A \setminus B$ og $B \setminus A$ er disjunkte. Sidste udtryk er lig $1_A + 1_B \pmod 2$, da 2 altid går op i $2 \cdot 1_A 1_B$.

(ii)

$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

Vi benytter indikatorfunktioner. Vi har, at

$$\begin{aligned}
1_{(A\triangle B)\triangle C} &= 1_{A\triangle B} + 1_C - 2 \cdot 1_{A\triangle B} 1_C \\
&= 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B + 1_C - 2 \cdot (1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B) 1_C \\
&= 1_A + 1_B + 1_C - 2(1_A 1_B + 1_A 1_C + 1_B 1_C) + 4 \cdot 1_A 1_B 1_C,
\end{aligned}$$

imens

$$\begin{aligned}
1_{A\triangle(B\triangle C)} &= 1_A + 1_{B\triangle C} + 1_C - 2 \cdot 1_A 1_{B\triangle C} \\
&= 1_A + 1_B + 1_C - 2 \cdot 1_B 1_C - 2 \cdot 1_A (1_B + 1_C - 2 \cdot 1_B 1_C) \\
&= 1_A + 1_B + 1_C - 2(1_A 1_B + 1_A 1_C + 1_B 1_C) + 4 \cdot 1_A 1_B 1_C.
\end{aligned}$$

Da mængdernes indikatorfunktioner er lig hinanden, er mængderne lig hinanden.

(2.7)

Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning og lad $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Vis, at vi i almindelighed har

$$f(f^{-1}(B)) \subsetneq B \text{ og } f^{-1}(f(A)) \supsetneq A.$$

Hvornår gælder "=" i ovenstående udtryk? Giv et eksempel, der viser, at ovenstående inklusioner nogle gange er strenge.

$\underline{f(f^{-1}(B)) \subseteq B}$:
Først og fremmest gælder $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ altid. Hvis $y \in f(f^{-1}(B))$ findes $x \in f^{-1}(B)$ så $f(x) = y$. Men da $x \in f^{-1}(B)$, vil $y = f(x) \in B$. Hvis der gjaldt lighed, ville hele B blive ramt af f, idet vi for ethvert $y \in B$ ville have $x \in f^{-1}(B) \subseteq A$ så $f(x) = y$. Et oplagt eksempel til, at der kan gælde streng inklusion, kunne derfor være en ikke-surjektiv funktion. Lad fx $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = 1$ og lad $B = \mathbb{R}$. Da vil $f(f^{-1}(B)) = f(\mathbb{R}) = \{1\} \neq \mathbb{R}$.

$\underline{f^{-1}(f(A)) \supseteq A}$:
Der gælder altid, at $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Hvis $x \in A$, vil $f(x) \in f(A)$, hvormed $x \in f^{-1}(f(A))$. Hvis der gjaldt lighed, ville vi fra $f(x) \in f(A)$ kunne konkludere, at $x \in A$. Et oplagt eksempel til, at der kan gælde streng inklusion, kunne derfor være en ikke-injektiv funktion. Lad fx $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$ og lad $A = \{1\}$. Da vil $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\} \neq \{1\}$.

2.8

Lad $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ være to injektive afbildninger. Vis, at $g \circ f$ er injektiv.

Lad $x_1, x_2 \in X$ så $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Da vil $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, så da g er injektiv, vil $f(x_1) = f(x_2)$. Da f er injektiv, vil $x_1 = x_2$, så $g \circ f$ er injektiv.

2.9

Vis, at følgende mængder har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$:

• $A = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \text{ er ulige}\}$: Definér en afbildning $f\colon \mathbb{N} \to A$ ved $f(x) = 2x - 1$. Bemærk, at f er veldefineret, da $2x - 1 \in \mathbb{N}$ for alle $x \in \mathbb{N}$ og at $2x - 1$ er ulige. Vi har, at f er injektiv, thi hvis $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$ for $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, vil klart gælde, at $x_1 = x_2$. Hvis $y \in A$, er y et ulige positivt heltal, så der findes $n \in \mathbb{Z}$ så $y = 2n + 1$. Da $y \geq 1$, vil $n \geq 0$. Sættes $x = n + 1 \in \mathbb{N}$, vil $f(x) = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1 = y$, så f er også surjektiv. Dermed er f en bijektion, og vi slutter, at A og $\mathbb{N}$ har samme kardinalitet.

• $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$: Lad $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ være bijektionen fra Example 2.5 (iii). Vi definerer først en afbildning $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ved $f(m, n) = (m, g(n))$. Da er f også en bijektion (hvilket er nemt at tjekke). Lader vi $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være bijektionen fra Example 2.5 (iv), får vi, at $h \circ f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ er en bijektion.

• $\mathbb{Q}^m$ $(m \in \mathbb{N})$: Vi ved fra forrige delopgave, at der findes en bijektion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Lad $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ være givet ved $g(y) = (n, k)$, hvor $y = \frac{k}{n}$ og n er valgt *mindst muligt*, så brøken ikke kan forkortes yderligere. Da er g en injektion, så vi har dermed en injektion $h = f \circ g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Inklusionen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ giver os en injektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, hvormed vi har en bijektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ jf. Schröder-Bernsteins sætning.

Lad $h_1, \ldots, h_m\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ være m kopier af denne bijektion, og lad $p_1, \ldots, p_m$ være de første m primtal. Vi definerer nu $j\colon \mathbb{Q}^m \to \mathbb{N}$ ved

$$j(x_1, \ldots, x_m) = p_1^{h_1(x_1)} p_2^{h_2(x_2)} \cdots p_m^{h_m(x_m)}.$$

Vi påstår nu, at j er en injektion. Hvis $j(x_1, \ldots, x_m) = j(x_1', \ldots, x_m')$ for $(x_1, \ldots, x_m), (x_1', \ldots, x_m') \in \mathbb{Q}^m$, vil

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} = p_1^{n_1'} p_2^{n_2'} \cdots p_m^{n_m'},$$

hvor $n_i = h_i(x_i)$ og $n_i' = h_i(x_i')$ for $i = 1, \ldots, m$. Dermed vil

$$p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} = p_1^{n_1' - n_1} p_2^{n_2'} \cdots p_m^{n_m'}.$$

Altså går $p_1^{n_1' - n_1}$ op i højresiden og dermed i venstresiden. Dette må nødvendigvis medføre, at

$$p_1^{n_1' - n_1} = 1,$$

hvormed $n_1' - n_1 = 0$ og $n_1' = n_1$. Fortsættes på denne måde med n_i og n_i' for $i \geq 2$, fås at $h_i(x_i) = n_i = n_i' = h_i(x_i')$ for alle $i = 1, \ldots, m$. Da hver h_i er bijektiv, følger specielt, at $x_i = x_i'$ for alle $i = 1, \ldots, m$, så vi slutter, at j er injektiv.

Vi har altså, at $\#\mathbb{Q}^m \leq \#\mathbb{N}$. Da afbildningen $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^m$ givet ved $n \mapsto (n, 0, \dots, 0)$ også er injektiv, følger også, at $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Q}^m$, hvormed $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}^m$ jf. Schröder-Bernsteins sætning (Theorem 2.7).

- $D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^m$: Lad $h_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^m$ være en bijektion for $m \in \mathbb{N}$. Hvis $x \in D$, vil der findes ét $m \in \mathbb{N}$ så $x \in \mathbb{Q}^m$ (alle $\mathbb{Q}^m$'er ses som disjunkte), og der findes derpå ét $n \in \mathbb{N}$ så $x = h_m(n)$ (da h_m er bijektiv). Definér $g(x) = (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i dette tilfælde. Da er g en bijektion:

  - g er injektiv. Lad $x_1, x_2 \in D$ og antag, at $g(x_1) = g(x_2)$. Der findes da entydige $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$ så $x_1 \in \mathbb{Q}^{m_1}$ og $x_1 = h_{m_1}(n_1)$ og $m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ så $x_2 \in \mathbb{Q}^{m_2}$ og $x_2 = h_{m_2}(n_2)$. Da $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ pr. antagelse, vil $x_1 = h_{m_1}(n_1) = h_{m_2}(n_2) = x_2$.

  - g er surjektiv. Lad $(m, n) \in \mathbb{N}$ og betragt $x = h_m(n) \in \mathbb{Q}^m \subseteq D$. Da vil $g(x) = (m, n)$.

Da vi har en bijektion $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jf. Example 2.5 (iv), vil $f \circ g \colon D \to \mathbb{N}$ være en bijektion, så $\#D = \#\mathbb{N}$.

2.11

Vis, at hvis $E \subseteq F$, vil $\#E \leq \#F$. Specielt vil delmængder af tællelige mængder være tællelige.

Vi har en injektiv afbildning $f \colon E \to F$ givet ved $f(x) = x$. (Og ja, det er alt der er at sige om det.)

2.13

Vis, at mængden $\mathbb{R}$ er overtællelig og at $\#(0, 1) = \#\mathbb{R}$.

Vi vil finde en bijektion $(0, 1) \to \mathbb{R}$. Lad os starte med tangens: $f \colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \tan(x)$ er en bijektion. Vi laver en bijektion $g \colon (0, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ved at definere $g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$. Da er $g \circ f \colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ en bijektion. Dermed er $\#\mathbb{R} = \#(0, 1) > \#\mathbb{N}$ (hvis der var en bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ville der også være en bijektion $\mathbb{N} \to (0, 1)$, i modstrid med Theorem 2.8).

(2.21)

Hvis $A \subseteq \mathbb{N}$ kan vi identificere indikatorfunktionen $1_A \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ med 0-1-følgen $(1_A(j))_{j \in \mathbb{N}}$, dvs. $1_A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Vis, at afbildningen

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni A \mapsto 1_A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

er en bijektion og konkludér, at $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$.

Først og fremmest er afbildningen injektiv. Hvis $1_A = 1_B$ for to mængder $A, B \subseteq \mathbb{N}$, vil

$$x \in A \Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \Leftrightarrow 1_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B,$$

så $A = B$. Lad nu $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ være en vilkårlig 0-1-følge, dvs. f er en afbildning $f \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Definér

$$A = f^{-1}(\{1\}).$$

Da vil

$$1_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Altså konkluderer vi, at $1_A = f$, hvormed afbildningen er surjektiv. Skal vi vise, at $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$, er det derfor nok at vise, at $\#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$.

Sætning 2. *Der gælder, at $\#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \#(0, 1) = \mathfrak{c}$.*

Bevis. Vi har en injektiv afbildning $\Phi \colon \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to (0, 1)$ givet ved, at vi for hver $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ med $x_n = f(n)$ sætter

$$\Phi(f) = 0,1x_1x_2x_3 \ldots = \frac{1}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{10^{n+1}}.$$

Lad os for god ordens skyld vise, at Φ er injektiv. Lad $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ og antag at $\Phi(f) = \Phi(g)$. Da vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) - g(n)}{10^{n+1}} = 0.$$

Antag, at der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $f(N) \neq g(N)$. Lad N være det mindste tal $n \in \mathbb{N}$ således at $f(n) \neq g(n)$; vi kan uden tab af generalitet antage, at $f(N) > g(N)$, hvormed $f(N) = 1$ og $g(N) = 0$. Da har vi, at $f(n) = g(n)$ for alle $n < N$, hvormed

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(n) - g(n)}{10^{n}} = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) - g(n)}{10^{n+1}} = 0.$$

Da $f(N) - g(N) = 1 - 0 = 1$, har vi derfor, at $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(n)-g(n)}{10^n} = \frac{1}{10^N}$. Imidlertid har vi, at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10^N} &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(n) - g(n)}{10^n} \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{f(n) - g(n)}{10^n} \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{1}{10^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{1}{10^{N+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^N} \frac{1}{10-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10^N},
\end{aligned}$$

hvilket er en klar modstrid. Altså vil $f(n) = g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvormed $f = g$. Altså er Φ injektiv, og vi har $\#\{0,1\}^{\mathbb{N}} \leq \#(0,1)$.

Omvendt findes der for hvert $x \in (0,1)$ en entydig følge $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ således at

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n}.$$

f kan defineres således: da $x \in (0,1)$ findes et entydigt $f(1) \in \{0,1\}$ så $f(1) \leq 2x < f(1) + 1$. Da må $2f(1) \leq 4x < 2f(1) + 2$; bemærk, at $[2f(1), 2f(1) + 2)$ er et interval af længde 2 med heltallige endepunkter. Derfor findes et entydigt $f(2) \in \{0,1\}$ så

$$2f(1) + f(2) \leq 4x < 2f(1) + f(2) + 1.$$

Nu er $4f(1) + 2f(2) \leq 8x < 4f(1) + 2f(2) + 2$. Igen vil $[4f(1) + 2f(2), 4f(1) + 2f(2) + 2)$ være et interval af længde 2 med heltallige endepunkter. Tag det entydige $f(3) \in \{0,1\}$ så

$$4f(1) + 2f(2) + f(3) \leq 8x < 4f(1) + 2f(2) + f(3) + 1.$$

På denne måde vælges entydige $f(n) \in \{0,1\}$ så

$$2^{n-1}f(1) + \ldots + 2f(n-1) + f(n) \leq 2^n x < 2^{n-1}f(1) + \ldots + 2f(n-1) + f(n) + 1$$

eller, ved at dele med 2^n,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{2^i} \leq x < \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{2^i} + \frac{1}{2^n},$$

dvs. at $|x - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{2^i}| < \frac{1}{2^n}$, således at

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n}.$$

Vi definerer $\Omega(x) = f$. Hvis $x, y \in (0,1)$ og $f = \Omega(x) = \Omega(y) = g$, vil

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{2^n} = y,$$

så Ω er injektiv. Altså gælder, at $\#(0,1) \leq \#\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, hvormed Schröder-Bernsteins sætning (Theorem 2.7) giver os det ønskede. $\square$