Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

24. og 27. september 2013

Bevis af Fatous lemma (Theorem 9.11)

Hvis $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er en følge af positive, målelige, numeriske funktioner (dvs. med værdier i $[-\infty,\infty]$) over målrummet $(X,\mathcal{A},\mu)$, er $u := \liminf_{j\to\infty} u_j$ målelig og

$$\int_X u \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{j\to\infty} u_j \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_X u_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Husk, at $u(x) = \liminf_{j\to\infty} u_j(x)$ eksisterer i $[-\infty,\infty]$ for alle $x \in X$. Endvidere er u målelig jf. Corollary 8.9. Hvis vi benytter Beppo-Levis sætning (Theorem 9.6) på den voksende funktionsfølge $(\inf_{j\ge k} u_j)_{k\in\mathbb{N}}$ (hvorfor er den voksende?), som også er målelig jf. Corollary 8.9, bemærker vi at $u(x)$ er supremum for denne følge, hvormed

$$\int_X u \, \mathrm{d}\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_X \inf_{j\ge k} u_j \, \mathrm{d}\mu \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{j\ge k} \int_X u_j \, \mathrm{d}\mu \right) = \liminf_{j\to\infty} \int u_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Ved ulighedstegnet benyttede vi, at $\inf_{j\ge k} u_j \le u_j$ for alle $j \ge k$, hvor k er fast. Da vil gælde, at

$$\int_X \inf_{j\ge k} u_j \, \mathrm{d}\mu \le \int u_j \, \mathrm{d}\mu$$

for alle $j \ge k$, hvormed der også gælder

$$\int_X \inf_{j\ge k} u_j \, \mathrm{d}\mu \le \inf_{j\ge k} \int u_j \, \mathrm{d}\mu,$$

da $\int_X \inf_{j\ge k} u_j \, \mathrm{d}\mu$ er et undertal for tallene $\int u_j \, \mathrm{d}\mu$ for $j \ge k$, men infimum giver det største undertal.

Supplerende opgave 1

Lad $(X,\mathcal{A},\mu)$ være et målrum. Lad $\mathcal{M}^+$ betegne de positive funktioner på X.

(i)

Lad $(f_n)_{n\ge1}$ være en følge i $\mathcal{M}^+$, lad $f \in \mathcal{M}^+$, og antag at $f_n \to f$ punktvist. Antag videre, at $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = 2 + \frac{1}{n}$. Vis, at $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le 2$.

Vi vil benytte Fatous lemma. Lad os opsummere s. 64 først: Husk, at for enhver følge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vil

$$\liminf_{j\to\infty} x_j = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{j\ge k} x_j \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{j\ge k} x_j \right)$$

(sidste lighedstegn følger da følgen $(\inf_{j\ge k} x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er voksende) og

$$\limsup_{j\to\infty} x_j = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{j\ge k} x_j \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{j\ge k} x_j \right)$$

(sidste lighedstegn følger, da $(\sup_{j\ge k} x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er aftagende). $\liminf$ og $\limsup$ eksisterer altid i $\overline{\mathbb{R}}$, og

$$\liminf_{j\to\infty} x_j \le \limsup_{j\to\infty} x_j.$$

(x_j) konvergerer med grænsepunkt i $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis

$$\liminf_{j\to\infty} x_j = \limsup_{j\to\infty} x_j \in \mathbb{R},$$

i hvilket tilfælde lim inf og lim sup er lig grænsepunktet. Vi har endvidere følgende:

Sætning 1. *Hvis $x_j \to \infty$, vil $\liminf_{j\to\infty} x_j = \limsup_{j\to\infty} x_j = \infty$.*

Bevis. Det er nok at vise $\liminf_{j\to\infty} x_j = \infty$. Lad $K > 0$ og tag $N \in \mathbb{N}$ så $x_k \geq K$ for $k \geq N$. For fast $k \geq N$ og $j \geq k$ vil $j \geq N$, hvormed $x_j \geq K$; da K er et undertal for disse j, vil $\inf_{j\geq k} x_j \geq K$ for alle $k \geq N$. Dermed vil

$$\liminf_{j\to\infty} x_j = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{j\geq k} x_j\right) \geq \sup_{k\geq N} \left(\inf_{j\geq k} x_j\right) \geq K.$$

Da K var vilkårlig, slutter vi, at $\liminf_{j\to\infty} x_j = \infty$. $\square$

Altså har vi hvis (x_j) konvergerer i $[-\infty, \infty]$, at $\liminf_{j\to\infty} x_j = \limsup_{j\to\infty} x_j = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Tilbage til opgaven. Da $f_n \to f$ punktvist, vil $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f$. Altså vil jf. Fatous lemma (Theorem 9.11) gælde, at

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2,$$

da følgen $(2 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer.

(ii)

Find for hvert $\alpha \in [0, 2]$ funktioner $(f_n)_{n\geq 1}$ og f i $\mathcal{M}^+$ så

$$f_n \to f, \qquad \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = 2 + \frac{1}{n}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \alpha.$$

Sæt $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ og $\mu = \lambda$, hvor λ er Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$. Definér $A = [0, \alpha] \subseteq \mathbb{R}$ og

$$B_n = [n + 2, n + 4 - \alpha + \frac{1}{n}].$$

Bemærk, at A og alle B_n'er er disjunkte, idet $\alpha \leq 2 < n + 2$ for $n \in \mathbb{N}$. Hvis

$$f = 1_A, \quad f_n = 1_A + 1_{B_n},$$

vil $f, (f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jf. Example 8.5 og Corollary 8.10, og

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \lambda(A) + \lambda(B_n) = \alpha + \left(\left(n + 4 - \alpha + \frac{1}{n}\right) - (n + 2)\right) = \alpha + \left(2 - \alpha + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n},$$

da A og B_n er disjunkte, samt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lambda(A) = \alpha,$$

det hele jf. Properties 9.8. Det genstår nu at vise, at $f_n \to f$ eller at $1_{B_n} \to 0$ punktvist. Intuitivt er det klart nok, idet B_n "forsvinder imod ∞", men lad os vise det formelt: for ethvert $x \in \mathbb{R}$ kan vi lade $N \in \mathbb{N}$ så $N + 2 > x$. Da vil for alle $n \geq N$ gælde, at $n + 2 \geq N + 2 > x$, hvormed $x \notin B_n$. Altså vil $1_{B_n}(x) = 0$ for alle $n \geq N$, hvilket medfører, at $1_{B_n}(x) \to 0$ for $n \to \infty$. Altså er det ønskede vist.

Supplerende opgave 2

Betragt målrummet $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ hvor μ er tællemålet. Lad $(f_n)_{n\geq 1}$ og $(g_n)_{n\geq 1}$ være funktioner i $\mathcal{M}^+$ defineret ved

$$f_n = 1_{\{n\}}, \quad g_n = \begin{cases} 1_{\{1\}}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ 1_{\{2\}}, & \text{hvis } n \text{ er lige.} \end{cases}$$

(i)

Bestem funktionerne $\limsup_{n\to\infty} f_n$ og $\limsup_{n\to\infty} g_n$.

For $m \in \mathbb{N}$ vil for *alle* $n > m$ gælde $1_{\{n\}}(m) = 0$ (således at $1_{\{n\}}(m) = 0$ fra et vist trin). Altså vil $\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

For at finde $\limsup_{n\to\infty} g_n(m)$ for $m \in \mathbb{N}$ deler vi op i tre tilfælde som man måske kan gætte sig til ud fra definitionen på g_n:

1. $m = 1$. Hvis $k \in \mathbb{N}$ findes der et $j_0 \geq k$ så j_0 er ulige. Dermed vil
$$\sup_{j\geq k} g_j(m) \geq g_{j_0}(m) = 1_{\{1\}}(m) = 1.$$
Da $g_j(m) \leq 1$ for alle $j \geq k$, får vi, at $\sup_{j\geq k} g_j(m) = 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Dermed vil
$$\limsup_{k\to\infty} g_k(m) = \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} g_j(m) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$
2. $m = 2$. Hvis $k \in \mathbb{N}$ findes der et $j_0 \geq k$ så j_0 er lige. Dermed vil
$$\sup_{j\geq k} g_j(m) \geq g_{j_0}(m) = 1_{\{2\}}(m) = 1.$$
Dermed vil $\sup_{j\geq k} g_j(m) = 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Dermed vil $\limsup_{k\to\infty} g_k(m) = 1$.
3. $m \geq 3$. Da vil $g_k(m) = 0$ for alle $k \in \mathbb{N}$, således at $\limsup_{k\to\infty} g_k(m) = 0$.

Altså har vi, at
$$\limsup_{n\to\infty} g_n = 1_{\{1,2\}}.$$

(ii)

Vis, at
$$\int_{\mathbb{N}} \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu < \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_{\mathbb{N}} \limsup_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu > \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} g_n \,\mathrm{d}\mu.$$
Konkludér, at ingen version af Fatous lemma (Theorem 9.11) gælder med "lim sup" i stedet for "lim inf".

Bemærk først at tællemålet μ er lig $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$, således at vi har jf. Example 9.10 (ii), at
$$\int_{\mathbb{N}} u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} u(j)$$
for enhver målelig funktion u på $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Endvidere er f_n klart målelig, og da g_n enten er lig $1_{\{1\}}$ eller $1_{\{2\}}$, er g_n også målelig. Da vil
$$\int_{\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{n\}}(j) = 1_{\{n\}}(n) = 1$$
og
$$\int_{\mathbb{N}} g_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} g_n(j) = 1$$
(tjek i tilfældet n lige og n ulige). Dermed vil
$$\int_{\mathbb{N}} \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu$$
og
$$\int_{\mathbb{N}} \limsup_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}} 1_{\{1,2\}} \,\mathrm{d}\mu = \mu(\{1,2\}) = 2 > 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} g_n \,\mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} g_n \,\mathrm{d}\mu.$$
Ved den anden ulighed ses, at Fatous lemma ikke gælder med "lim sup" i stedet for "lim inf". Da kunne man eventuelt håbe på, at Fatous lemma med "lim sup" i stedet for "lim inf" gjaldt, hvis man vendte ulighedstegnet om, men dette ødelægger den første ulighed.

Supplerende opgave 3

Lad $(q_n)_{n\geq 1}$ være en følge af reelle tal. Som sædvanligt betegner λ Lebesgue-målet på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(i)

Beregn integralet

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n + \frac{1}{n}]} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Argumentér omhyggeligt for hvert trin i udregningerne.

For alle $n \in \mathbb{N}$ er funktionen $u_n(x) = \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n+\frac{1}{n}]}(x)$ ikke-negativ (den antager kun værdierne 0 og $\frac{1}{n}$). Endvidere er u_n målelig jf. Examples 8.5 (i), Corollary 8.10 og Example 7.3, da afbildningen $x \mapsto \frac{1}{n}$ er kontinuert og dermed målelig. Ved at benytte Corollary 9.9 fås, at

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n + \frac{1}{n}]} \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n + \frac{1}{n}]} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Da $\frac{1}{n} \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, fås ved Properties 9.8 (ii) og (i) at

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n + \frac{1}{n}]} \, \mathrm{d}\lambda &\overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{[q_n, q_n + \frac{1}{n}]} \, \mathrm{d}\lambda \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda\left(\left[q_n, q_n + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda\left(\left[q_n, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}$$

idet vi benytter definitionen på Lebesgue-målet samt at singletonmængder har mål 0.

(ii)

Kan man vælge $(q_n)_{n\geq 1}$ og $x \in \mathbb{R}$ så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n+\frac{1}{n}]}(x) = \infty$?

Sagtens. Lad $q_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $x = 0$. Da vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n+\frac{1}{n}]}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[0, 0+\frac{1}{n}]}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(iii)

Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n+\frac{1}{n}]}(x) < \infty$ λ-næsten overalt.

Vi viser Opgave 10.6 nedenfor. Sættes $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[q_n, q_n+\frac{1}{n}]}(x) < \infty$, er u målelig jf. Corollary 9.9 og vores argumentation i (i). Endvidere er u ikke-negativ, så da $\int |u| \, \mathrm{d}\lambda = \int |u|^p \, \mathrm{d}\lambda$ for $p = 1$ jf. (i), vil $|u| = u$ være reel λ-næsten overalt jf. Opgave 10.6, som ønsket.

Supplerende opgave 3.5

Lad $(X, \mathcal{A})$ være et målbart rum, og lad $\mu_1, \ldots, \mu_k$ være mål på $(X, \mathcal{A})$. Vis, at $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ er et mål på $(X, \mathcal{A})$, og vis, at

$$\int_X u \, \mathrm{d}\mu = \int_X u \, \mathrm{d}\mu_1 + \cdots + \int_X u \, \mathrm{d}\mu_k$$

for alle $u \in \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}^{+}(\mathcal{A})$.

Vi har allerede vist i Opgave 4.6, at μ er et mål, men lad os lige genopfriske beviset: at $\mu(\emptyset) = 0$ er klart, og hvis $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ er en familie af parvist disjunkte målelige mængder, er

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu_n\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_n(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{k} \mu_n(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Igen tager vi ikke højde for konvergensproblemer; ovenstående gælder, hvis alle rækker konvergerer og der kun indeholder endelige værdier for målene, og hvis ikke, er det hele blot lig ∞. μ er altså et mål. For at vise integralresultatet for alle $u \in \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}^{+}(\mathcal{A})$, starter vi blidt ud. Hvis $A \in \mathcal{A}$, vil vi have, at

$$\int 1_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j(A) = \sum_{j=1}^{k} \int 1_A \,\mathrm{d}\mu_j. \tag{1}$$

Hvis $f \in \mathcal{E}^{+}(\mathcal{A})$ er en simpel ikke-negativ funktion, findes der en standardrepræsentation $f = \sum_{i=1}^{n} y_i 1_{A_i}$ jf. Examples 8.7 (iii), hvorom altså gælder, at A_j'erne er disjunkte målelige mængder med forening lig X og y_j'erne er ikke-negative tal. Da vil

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &= \int \sum_{i=1}^{n} y_i 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{9.8}{=} \sum_{i=1}^{n} y_i \int 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{k} \int 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \int \sum_{i=1}^{n} y_i 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_j = \sum_{j=1}^{k} \int f \,\mathrm{d}\mu_j,\end{aligned}$$

idet vi kan bytte frit om på rækkefølgen, når vi summer endeligt, og hvor vi benyttede (1). Altså vil

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \int f \,\mathrm{d}\mu_j$$

for alle simple funktioner $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$. Lad nu $u \in \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}^{+}(\mathcal{A})$. Da ved vi fra Theorem 8.8, at der findes en voksende følge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af simple, ikke-negative funktioner, således at $u = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$. Da følger nu af Corollary 9.7 samt ovenstående lighed for simple funktioner, at

$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \int u_n \,\mathrm{d}\mu_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\mu_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \int u \,\mathrm{d}\mu_j,$$

som ønsket.

Supplerende opgave 4

Betragt målrummet $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, hvor ν er tællemålet. For hvert $y \in \mathbb{N}$ lades δ_y være Dirac-målet i punktet y.

(i)

Vis, at $\mu = \nu + \delta_2 + \delta_5$ er et mål på $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Da ν og δ_y er mål på $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ for alle $y \in \mathbb{N}$, følger det ønskede af at benytte Opgave 4.6 (i) to gange.

(ii)

Bestem $\mu(\{2,3,4,5,6,7,8,9\})$, $\mu(\mathbb{N})$ og $\mu(P)$, hvor P er mængden af primtal i $\mathbb{N}$.

Vi har

$$\mu(\{2,\dots,9\}) = \nu(\{2,\dots,9\}) + \delta_2(\{2,\dots,9\}) + \delta_5(\{2,\dots,9\}) = 8+1+1 = 10.$$

Da P og $\mathbb{N}$ er uendelige delmængder af $\mathbb{N}$, følger at $\nu(\mathbb{N}) = \nu(P) = \infty$, hvormed $\mu(\mathbb{N}) = \mu(P) = \infty$, idet $\mu \geq \nu$.

(iii)

Bestem $\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mu$, hvor $f(n) = 2^{-n}$.

Vi har, at

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\nu + \int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\delta_2 + \int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\delta_5.$$

Dette følger nemlig af Supplerende Opgave 3.5. Da vil jf. Examples 9.10 (i) og (ii) gælde

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\nu + \int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\delta_2 + \int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\delta_5 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) + f(2) + f(5) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = 1 + \frac{9}{32} = \frac{41}{32}.\end{aligned}$$

9.5

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrum og lad $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Vis, at funktionen $A \mapsto \int 1_A u \, \mathrm{d}\mu$, $A \in \mathcal{A}$, er et mål.

Først og fremmest er $1_\emptyset = 0$, således at (M_1) gælder jf. Properties 9.8 (ii) med $\alpha = 0$. Lad nu $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være en familie af parvist disjunkte mængder i $\mathcal{A}$. Da vil nu gælde, at

$$1_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j}.$$

Vi har nemlig, at hvis $x \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, vil $x \in A_j$ for kun ét j (alle A_j'er er disjunkte), hvormed højresiden er lig 1 i x. Hvis $x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, vil $x \notin A_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$, hvormed højresiden er lig 0 i x. Vi har oplagt, at

$$1_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} u(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j} u(x)$$

for alle $x \in X$, og dermed $1_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} u = \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j} u$. Idet alle 1_{A_j}'er er målelige og ikke-negative funktioner jf. Example 8.5 (i), fås nu jf. Corollary 9.9, at

$$\int 1_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} u \, \mathrm{d}\mu = \int \sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j} u \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int 1_{A_j} u \, \mathrm{d}\mu,$$

som netop er det ønskede.

9.6

Vis, at enhver funktion $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ på $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ er målelig.

For alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vil $u^{-1}(B) \subseteq \mathbb{N}$, hvormed $u^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Færdig. Vi kan også indse, at

$$u(n) = \sum_{j=1}^{\infty} u(j) 1_{\{j\}}(n),$$

og derpå benytte Corollary 9.9.

(9.9)

Fatous lemma for mål. Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrum og lad $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $A_j \in \mathcal{A}$, være en følge af målelige mængder. Vi definerer

$$\liminf_{j\to\infty} A_j := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\geq k} A_j \quad \text{og} \quad \limsup_{j\to\infty} A_j := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq k} A_j.$$

(i)

Vis, at $1_{\liminf_{j\to\infty} A_j} = \liminf_{j\to\infty} 1_{A_j}$ og $1_{\limsup_{j\to\infty} A_j} = \limsup_{j\to\infty} 1_{A_j}$. [Vis først, at $1_{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \inf_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j}$ og $1_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \sup_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j}$.]

Lad os vise hintet mere generelt og antage, at $(B_i)_{i\in I}$ er en familie af mængder i X (de behøver ikke at være målelige). Lad $x \in X$. Hvis $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, vil $x \in B_i$ og dermed $1_{B_i}(x) = 1$ for alle $i \in I$, så $\inf_{i\in I} 1_{B_i}(x) = 1$. Hvis $x \notin \bigcap_{i\in I} B_i$ findes $i_0 \in I$ så $x \notin B_{i_0}$ og dermed $1_{B_{i_0}}(x) = 0$. Altså vil

$$\inf_{i\in I} 1_{B_i}(x) \leq 1_{B_{i_0}}(x) = 0.$$

Da vi endvidere har, at $1_{B_i}(x) \geq 0$ for alle $i \in I$, vil $\inf_{i\in I} 1_{B_i}(x) \geq 0$, hvormed vi slutter, at $\inf_{i\in I} 1_{B_i}(x) = 0$. Altså er

$$1_{\bigcap_{i\in I} B_i}(x) = \inf_{i\in I} 1_{B_i}(x).$$

Hvis $x \in \bigcup_{i\in I} B_i$, findes $i_0 \in I$ så $1_{B_{i_0}}(x) = 1$. Altså vil

$$\sup_{i\in I} 1_{B_i}(x) \geq 1_{B_{i_0}}(x) = 1.$$

Da $1_{B_i}(x) \leq 1$ for alle $i \in I$, har vi endvidere $\sup_{i\in I} 1_{B_i}(x) \leq 1$, og dermed lighed. Hvis $x \notin \bigcup_{i\in I} B_i$, vil $x \notin B_i$ og dermed $1_{B_i}(x) = 0$ for alle $i \in I$, hvormed $\sup_{i\in I} 1_{B_i}(x) = 0$. Altså er hintet vist.

Hvad giver dette os? Lad os se:

$$1_{\liminf_{j\to\infty} A_j} = \sup_{k\in\mathbb{N}} 1_{\bigcap_{j\geq k} A_j} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq k} 1_{A_j} = \liminf_{j\to\infty} 1_{A_j}.$$

Her brugte vi først anden lighed i hintet med $I = \mathbb{N}$ og derpå første lighed i hintet med $I = \{j \geq k\} = \{j \in \mathbb{N} \,|\, j \geq k\}$ for fast k. På samme måde fås

$$1_{\limsup_{j\to\infty} A_j} = \inf_{k\in\mathbb{N}} 1_{\bigcup_{j\geq k} A_j} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq k} 1_{A_j} = \limsup_{j\to\infty} A_j.$$

(ii)

Vis, at

$$\mu\left(\liminf_{j\to\infty} A_j\right) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Vi har, at

$$\mu\left(\liminf_{j\to\infty} A_j\right) = \int_X 1_{\liminf_{j\to\infty} A_j}\, d\mu = \int_X \liminf_{j\to\infty} 1_{A_j}\, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_X 1_{A_j}\, d\mu = \liminf_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

jf. (i) og Fatous lemma (Theorem 9.11). Alternativt kan benyttes metoden i næste delopgave.

(iii)

Vis, at

$$\limsup_{j\to\infty} \mu(A_j) \leq \mu\left(\limsup_{j\to\infty} A_j\right)$$

hvis μ er et endeligt mål.

Vi har, at

$$\mu\left(\limsup_{j\to\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\geq k} A_j\right) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right),$$

hvor $B_k = \bigcup_{j\geq k} A_j$ for $k \in \mathbb{N}$. For $k \leq \ell$ vil

$$B_\ell = \bigcup_{j\geq \ell} A_j \subseteq \bigcup_{j\geq k} A_j = B_k,$$

så

$$\mu\left(\limsup_{j\to\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k),$$

grundet Theorem 4.4 (iii'), hvor vi benytter, at μ er endelig. Bemærk nu, at monotoni giver at $\mu(B_k) = \mu(\bigcup_{j\geq k} A_j) \geq \mu(A_j)$ for alle $k \in \mathbb{N}$ og $j \geq k$. Dermed må

$$\mu(B_k) \geq \sup_{j\geq k} \mu(A_j) \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq k} \mu(A_j) = \limsup_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Dermed er $\limsup_{j\to\infty} \mu(A_j)$ et undertal for alle $\mu(B_k)$, så vi slutter, at

$$\mu\left(\limsup_{j\to\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \geq \limsup_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(iv)

Giv et eksempel, der viser at (iii) ikke holder hvis μ ikke er endeligt.

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ og definer $A_j = [j, 2j]$ for $j \in \mathbb{N}$. Da vil

$$\limsup_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\geq k} A_j = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k, \infty) = \emptyset$$

og dermed have mål 0, men $\limsup_{j\to\infty} \lambda(A_j) = \limsup_{j\to\infty} j = \infty$, således at (iii) ikke holder. Lebesgue-målet er heller ikke endeligt.

10.2

Lad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ være et sandsynlighedsrum. Find et modeksempel til følgende påstand: *Enhver P-integrabel funktion $u \in \mathcal{L}^1(P)$ er begrænset.*

Vi vil ikke helt følge hintet (mest fordi forfatteren åbenbart ikke helt har tænkt det igennem). Sæt $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap \Omega$ (som er en σ-algebra jf. Examples 3.3 (vi)) og $P = \lambda$ (i den forstand at $P(A) = \lambda(A \cap (0, 1])$; dette er et mål jf. Opgave 4.7). Lad $u\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Da er u klart ubegrænset, så det genstår at vise, at u er Lebesgue-integrabel. Bemærk endvidere, at u er strengt aftagende. Definér nu $u_n\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$ ved

$$u_n(x) = 1_{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]}(x)u(x).$$

Da er u_n et produkt af målelige funktioner og dermed selv målelig; endvidere er u_n ikke-negativ. Bemærk endvidere, at

$$|u(x)| = u(x) = u(x)\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]}(x)u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

for alle $x \in (0, 1]$. Da u er aftagende, har vi endvidere

$$u_n(x) \leq 1_{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]}(x)u\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1_{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]}(x)\sqrt{2^n}.$$

Af Corollary 9.9 følger, at

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|\,\mathrm{d}P &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega u_n\,\mathrm{d}P \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega \sqrt{2^n}1_{(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]}\,\mathrm{d}P \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n}P\left(\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \infty\end{aligned}$$

da ovenstående er en geometrisk række med kvotient $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ (dog uden 0'te led).

10.5 (i), (ii), (iii)

Vis de følgende varianter af Markovs ulighed (Proposition 10.12): For alle $c > 0$ og når de involverede udtryk giver mening (er endelige), gælder:

(i)

$\mu(\{|u| > c\}) \le \frac{1}{c}\int |u|\,\mathrm{d}\mu$.

Dette følger af delopgave (ii) med $p = 1$, så lad os vise den i stedet!

(ii)

$\mu(\{|u| > c\}) \le \frac{1}{c^p}\int |u|^p\,\mathrm{d}\mu$ for alle $0 < p < \infty$.

Dette følger af delopgave (iii), da $\mu(\{|u| > c\}) \le \mu(\{|u| \ge c\})$ og da $t \mapsto t^p$ for $0 < p < \infty$ er en voksende funktion på $[0,\infty)$, så lad os vise *den* i stedet!

(iii)

$\mu(\{|u| \ge c\}) \le \frac{1}{\phi(c)}\int \phi(|u|)\,\mathrm{d}\mu$, hvor $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ er voksende.

Bemærk at $|u(x)| \ge c$ medfører $\phi(|u(x)|) \ge \phi(c)$ for alle $x \in X$, idet ϕ er voksende. Dermed vil

$$\begin{aligned}\mu(\{|u| \ge c\}) \le \mu(\{\phi(|u(x)|) \ge \phi(c)\}) &= \int_X 1_{\{\phi(|u(x)|)\ge\phi(c)\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \frac{\phi(|u(x)|)}{\phi(|u(x)|)}1_{\{\phi(|u(x)|)\ge\phi(c)\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

Hvis x opfylder $\phi(|u(x)|) \ge \phi(c)$, vil

$$1_{\{\phi(|u(x)|)\ge\phi(c)\}}(x)\frac{\phi(|u(x)|)}{\phi(|u(x)|)} = \frac{\phi(|u(x)|)}{\phi(|u(x)|)} \le \frac{\phi(|u(x)|)}{\phi(c)}.$$

Hvis x ikke opfylder det, gælder ovenstående ulighed trivielt (idet ϕ ikke antager værdien ∞ pr. antagelse). Altså vil grundet monotoni (Properties 9.8 (iv)) gælde, at

$$\begin{aligned}\mu(\{|u| \ge c\}) &= \int_X \frac{\phi(|u(x)|)}{\phi(|u(x)|)}1_{\{\phi(|u(x)|)\ge\phi(c)\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\le \int_X \frac{\phi(|u(x)|)}{\phi(c)}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \frac{1}{\phi(c)}\int_X \phi(|u(x)|)\,\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

grundet Properties 9.8 (ii). Altså har vi det ønskede.

10.6

Vis, at $\int |u|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$ medfører, at u er reel næsten overalt (dvs. $u(x) \in (-\infty, \infty)$ for næsten alle x). Gælder dette stadig hvis vi har $\int \arctan(u) \, \mathrm{d}\mu < \infty$?

Vi antager, at $0 < p < \infty$ og vi skal vise, at $\mu(\{|u| = \infty\}) = 0$. Bemærk, at $\mu(\{|u| = \infty\}) = \mu(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{|u| \geq k\})$, idet $|u(x)| = \infty$ hvis og kun hvis $|u(x)| \geq geqk$ for alle $k \in \mathbb{N}$. For $k \geq \ell$ vil $\{|u| \geq k\} \subseteq \{|u| \geq \ell\}$. Altså er følgen af mængder $(\{|u| \geq k\})_{k \in \mathbb{N}}$ aftagende. Jf. Opgave 10.5 (ii) har vi

$$\mu(\{|u| \geq 1\}) \leq \int |u|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Altså vil $\mu(\{|u| \geq k\}) < \infty$ for alle $k \in \mathbb{N}$, hvilket medfører at vi kan benytte Theorem 4.4 (iii'). Altså vil

$$\mu(\{|u| = \infty\}) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{|u| \geq k\}\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(\{|u| \geq k\}) \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^p} \int |u|^p \, \mathrm{d}\mu \to 0,$$

grundet Markovs ulighed og antagelsen at $\int |u|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Altså følger det ønskede.

Hvis vi sammensætter med arctan, har vi imidlertid et problem: hvis $u(x) = \infty$, vil blot gælde, at $\arctan(u(x)) = \frac{\pi}{2}$. Sammensætningen med arctan kan altså ikke opfange, om u er lig uendelig i et punkt. Hvis vi for eksempel havde et endeligt målrum (dvs. $0 < \mu(X) < \infty$) og vi satte $u(x) = \infty$ for alle $x \in X$, ville u være målelig og

$$\int \arctan(u(x)) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \frac{\pi}{2} \, \mathrm{d}\mu(x) = \frac{\pi}{2} \mu(X) < \infty,$$

men u er lig ∞ overalt.

(10.9)

Lad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ være et sandsynlighedsrum. Vis at for $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ vil

$$u \in \mathcal{L}^1(P) \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} P(\{|u| \geq j\}) < \infty.$$

Vi viser først, at

$$|u| \leq \sum_{j=0}^{\infty} 1_{\{|u| \geq j\}} \leq |u| + 1.$$

Lad $x \in \Omega$. Hvis $|u(x)| = \infty$, vil $|u(x)| \geq j$ for alle $j \in \mathbb{N}_0$, således at ovenstående uligheder gælder. Hvis $|u(x)| < \infty$ lades $N \in \mathbb{N}_0$ være det største ikke-negative heltal så $|u(x)| \geq N$. Da har vi $|u(x)| < N + 1$ (ellers ville N ikke være størst), og dermd $|u(x)| < j$ for alle $j > N$. For $0 \leq j \leq N$ vil $|u(x)| \geq N \geq j$, hvormed $1_{\{|u| \geq j\}}(x) = 1$, mens vi for $j > N$ har $|u| < N + 1 \leq j$ og dermed $1_{\{|u| \geq j\}}(x) = 0$. Altså vil

$$\sum_{j=0}^{\infty} 1_{\{|u| \geq j\}}(x) = \sum_{j=0}^{N} 1 = N + 1.$$

Da $|u(x)| < N + 1 \leq |u(x)| + 1$, følger det ønskede.

Hvis $u \in \mathcal{L}^1(P)$, vil $\int_\Omega |u| \, \mathrm{d}P < \infty$ jf. Theorem 10.3. Da vil

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} P(\{|u| \geq j\}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_\Omega 1_{\{|u| \geq j\}} \, \mathrm{d}P \\ &= \int_\Omega \sum_{j=0}^{\infty} 1_{\{|u| \geq j\}} \, \mathrm{d}P \leq \int_\Omega (|u| + 1) \, \mathrm{d}P = \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}P + \int_\Omega \mathrm{d}P = \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}P + 1 < \infty\end{aligned}$$

ved Properties 9.8 (iv) og Corollary 9.9, da indikatorfunktioner er målelige; vi benytter også, at $P(\Omega) = 1$. Hvis omvendt $\sum_{j=0}^{\infty} P(\{|u| \geq j\}) < \infty$, vil

$$\int_{\Omega} |u| \, \mathrm{d}P \leq \int_{\Omega} \sum_{j=0}^{\infty} 1_{\{|u| \geq j\}} \, \mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Omega} 1_{\{|u| \geq j\}} \, \mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{\infty} P(\{|u| \geq j\}) < \infty,$$

således at vi får den ønskede ækvivalens.