KomAn opgavesæt 3

Rasmus Sylvester Bryder

18. marts 2010

Problem 3.1

Betragt funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f(z) = \frac{\exp(z) - 1 - z}{z^2}.$$

(i)

Vi skal vise, at f har en hævelig singularitet i $z = 0$ og finde $\lim_{z\to 0} f(z)$.

Vi har for $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ givet ved $g(z) = \exp(z) - 1 - z$ og $h(z) = z^2$, at $g, h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Da h's eneste nulpunkt er for $z = 0$, giver CB 1.3 dermed, at $f = \frac{g}{h} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, hvorpå CB 6.8 giver, at 0 er en isoleret singularitet for f. Vi har for $z \neq 0$, at

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 - z\right) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}.$$

$f(z)$ er altså sumfunktionen for ovenstående potensrække for *alle* $z \neq 0$. Vi får derfor for $z \in K'(0,1)$, at

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{z^{n-2}}{n!}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^{n-2}}{n!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) - 2.$$

CB 6.9 giver, at f har en hævelig singularitet i 0.

Vi har, at $g(0) = h(0) = 0$, hvorpå 0 er nulpunkt for både g og h, og at $g, h \not\equiv 0$ i $K(0,1) \subseteq \mathbb{C}$. Vi har endvidere, da $h'(z) = 2z$ og $h''(z) = 2$, at $h(0) = h'(0) = 0$ og $h''(0) = 2$, hvor nulpunktet 0 for h har orden 2, og da $g'(z) = \exp(z) - 1$ og $g''(z) = \exp(z)$, at $g(0) = g'(0) = 0$ og $g''(0) = 1$, hvorpå nulpunktet 0 for g også har orden 2, begge jf. CB 6.2.

Altså har vi, at $\mathrm{ord}(g, 0) = \mathrm{ord}(h, 0) = 2$.

L'Hôpitals regel, CB 6.7, giver nu, at

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{g''(z)}{h''(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)}{2} = \frac{1}{2},$$

da $\mathrm{ord}(h, 0) = 2$, og da $\frac{1}{2}\exp$ er kontinuert.

(ii)

Eftersom $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ har en hævelig singularitet i 0, fås ved tilføjelse af funktionsværdien $f(0) := \lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{2}$, at f kan betragtes som holomorf i $\mathbb{C}$ jf. CB 6.8, hvorpå f kan ses som en hel, holomorf funktion.

Vi fandt før, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/(n+2)!$ for alle $z \neq 0$. Eftersom

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0^n/(n+2)!,$$

har vi altså, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/(n+2)!$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Entydighedssætningen for potensrækker giver nu, at dette er potensrækken for f, og konvergensradius er lig ∞, thi den konvergerer imod $f(z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

(iii)

Der skal forklares, hvorfor tallet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,r)} \frac{\exp(z) - 1 - z}{z^3}\mathrm{d}z$$

er uafhængigt af $r > 0$, og værdien skal bestemmes. Vi betragter vores hele og holomorfe udvidelse af f, bestemt i **(ii)**, så $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Nu vil $\overline{K(0,r)} \subseteq \mathbb{C}$ for alle $r > 0$, og eftersom

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,r)} \frac{\exp(z) - 1 - z}{z^3}\mathrm{d}z = \frac{1!}{2\pi i}\int_{\partial K(0,r)} \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z,$$

har vi pr. CB 4.8, at tallet/integralet er lig $f(0)$, som er uafhængigt af $r > 0$. Altså er integralets værdi $f(0) = \frac{1}{2}$.

Problem 3.2

(i)

Lad G være et domæne i $\mathbb{C}$ og antag, at $f, g \in \mathcal{H}(G)$, samt at $f, g \not\equiv 0$. Antag videre, at $z = a \in G$ er et nulpunkt for f af orden p og et nulpunkt for g af orden q, dvs. $\mathrm{ord}(f, a) = p$ og $\mathrm{ord}(g, a) = q$.

Vi skal vise, at $h = fg$ har et nulpunkt af orden $p + q$ for $z = a$, dvs. så

$$\mathrm{ord}(fg, a) = \mathrm{ord}(f, a) + \mathrm{ord}(g, a).$$

Da $\mathrm{ord}(f, a) = p$ og $\mathrm{ord}(g, a) = q$, findes pr. CB 6.1 $f_1, g_1 \in \mathcal{H}(G)$, således der for alle $z \in G$ gælder, at $f(z) = (z - a)^p f_1(z)$ og $g(z) = (z - a)^q g_1(z)$, hvor $f_1(a) \neq 0$ og $g_1(a) \neq 0$. Altså fås for alle $z \in G$, at

$$(fg)(z) = (z - a)^p f_1(z)(z - a)^q g_1(z) = (z - a)^{p+q} f_1(z) g_1(z).$$

Da $f_1 g_1 \in \mathcal{H}(G)$ og $(f_1 g_1)(a) \neq 0$, må gælde pr. CB 6.1, at

$$\mathrm{ord}(fg, a) = p + q = \mathrm{ord}(f, a) + \mathrm{ord}(g, a).$$

(ii)

Vi skal nu finde nulpunkterne for $f(z) = z(\sin z)^2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ og bestemme deres orden. Lad $g(z) = z$ og $h(z) = \sin z$. Vi har nu pr. **(i)**, at

$$\text{ord}(f, a) = \text{ord}(g, a) + 2\text{ord}(h, a)$$

for alle $a \in G$ (hvor ordenen sættes lig 0 for a, der ikke er nulpunkter). Sættes $f(z) = 0$, fås grundet nulreglen, at enten $z = 0$ eller $\sin(z) = 0$. CB 1.18 giver, at $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$. Altså udgør nulpunkterne for f mængden $\{0\} \cup \{p\pi \,|\, p \in \mathbb{Z}\} = \{p\pi \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$.

Lad $a \in \{p\pi \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$. Da $h'(z) = \cos(z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$, må $h'(a) \neq 0$ jf. CB 1.18, da $a \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Altså er $\text{ord}(h, a) = 1$ for alle a, som er nulpunkt for f.

Da $g'(z) = 1$ for alle $z \in \mathbb{C}$, er $\text{ord}(g, a)$ lig 1 for $a = 0$ (thi $g(0) = 0$) og 0 ellers. Da altså 0 er nulpunkt for f, får vi, at $\text{ord}(f, 0) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$. For alle $a \in \{p\pi \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$, hvor $a \neq 0$, får vi ellers, at $\text{ord}(f, a) = 0 + 2 = 2$.

(iii)

Vi skal nu bestemme $n \in \mathbb{Z}$, så $z \mapsto f(z)z^n$ har en pol af orden 2 for $z = 0$. Skal 0 være en pol af orden 2 for $f(z)z^n$ skal gælde, at $\lim_{z\to 0} z^2 z^n f(z)$ eksisterer og er forskellig fra 0.

Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da vil gælde, at

$$z^2 z^n f(z) = z^{3+n}(\sin z)^2 = z^{5+n}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$$

for $z \neq 0$. Vi har, at $\frac{\sin z}{z} \to 1$ for $z \to 0$, hvorpå $(\frac{\sin z}{z})^2 \to 1$ for samme. Altså skal vi blot sørge for, at grænseværdien for z^{5+n} for $z \to 0$ eksisterer og er forskellig fra 0, for at sikre, at $\lim_{z\to 0} z^2 z^n f(z)$ eksisterer og er forskellig fra 0. Det ses for $n \geq -4$, at $z^{5+n} \to 0$ for $z \to 0$, og for $n \leq -6$, at $z^{5+n} \to \infty$ for $z \to 0$, hvormed grænseværdien dertil ikke eksisterer.

For $n = -5$ vil vi få, at

$$z^2 z^n f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \to 1$$

for $z \to 0$. Altså udløser $n = -5$ en pol af orden 2 for funktionen $z \mapsto f(z)z^n$ for $z = 0$.