Sølvkorn 3
Differentiable kurver i $\mathbb{C}$

Rasmus Sylvester Bryder

Alle intervaller $I \subseteq \mathbb{R}$ er åbne i det følgende.

Definition 1. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være åben. En *kontinuert kurve i* $\mathbb{C}$ er en afbildning $\gamma : I \to \mathbb{C}$ på formen $\gamma(t) = f(t) + ig(t)$, hvor f, g er kontinuerte reelle afbildninger defineret på I.

Bemærkning 2. Ovenstående definition medfører selvfølgelig, at γ selv er kontinuert:

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)|^2 = |f(t) - f(t_0)|^2 + |g(t) - g(t_0)|^2.$$

Der gælder faktisk hvis og kun hvis, thi både $|f(t) - f(t_0)|^2$ og $|g(t) - g(t_0)|^2$ er mindre end $|\gamma(t) - \gamma(t_0)|^2$ jf. ovenstående; derfor kunne det lige så godt ligge i definitionen, at γ var kontinuert.

Bemærkning 3. Da f og g i definitionen er antaget at være reelle funktioner, vil $\mathrm{Re}\gamma = f$ og $\mathrm{Im}\gamma = g$; altså $\gamma = f + ig$.

Eksempel 4. *(i)* $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved $\gamma_1(t) = t + it^2$ er en kontinuert kurve i $\mathbb{C}$, der har parablen $y = x^2$ som graf fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. I det hele taget kan enhver kontinuert reel funktion f defineret på et interval I udtrykkes som en kontinuert kurve i $\mathbb{C}$, idet vi betragter funktionen $t \mapsto t + if(t)$. Dennes udseende i $\mathbb{C}$ vil da være grafen af $f(t)$ fra I ind i $\mathbb{R}$.

(ii) $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved $\gamma_2(t) = \cos(t) + i\sin(t)$ er en kontinuert kurve i $\mathbb{C}$, der har enhedscirklen i det komplekse plan som graf.

Definition 5. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være åben og lad $t_0 \in I$.

Den kontinuerte kurve $\gamma : I \to \mathbb{C}$ kaldes *differentiabel* i t_0, hvis grænseværdien $\lim_{h\to 0} h^{-1}(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))$ eksisterer og denne kaldes i så fald *differentialkvotienten* eller *kurvens afledte i* t_0 og betegnes $\gamma'(t_0)$. Er γ differentiabel for alle $t_0 \in I$, kaldes γ en *differentiabel kurve på I (i $\mathbb{C}$)*.

Bemærkning 6. Da vi undersøger differenskvotienten omkring $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, altså i et reelt interval, og da det skal give mening at tage γ på $t_0 + h$, skal $h \in \mathbb{R}$. Differentiabiliteten er altså en form for reel differentiabilitet.

Sætning 7. *En kontinuert kurve γ i $\mathbb{C}$ er differentiabel på et interval I, hvis og kun hvis* $\mathrm{Re}\gamma$ *og* $\mathrm{Im}\gamma$ *er reelt differentiable på I.*

Bevis. Lad $a \in \mathbb{C}$. Vi har for $t_0 \in I$, at

$$\tfrac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} - a = \tfrac{\mathrm{Re}\gamma(t_0+h)-\mathrm{Re}\gamma(t_0)}{h} - \mathrm{Re}a + i\left(\tfrac{\mathrm{Im}\gamma(t_0+h)-\mathrm{Im}\gamma(t_0)}{h} - \mathrm{Im}a\right).$$

Specielt kan vi tage længden af disse komplekse tal:

$$\left|\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h}-a\right|^2=\left|\frac{\mathrm{Re}\gamma(t_0+h)-\mathrm{Re}\gamma(t_0)}{h}-\mathrm{Re}a\right|^2+\left|\frac{\mathrm{Im}\gamma(t_0+h)-\mathrm{Im}\gamma(t_0)}{h}-\mathrm{Im}a\right|^2.$$

Antages, at γ er differentiabel i t_0 med differentialkvotient a, vil venstresiden gå imod 0, når vi lader $h \to 0$. Da vil højresiden også gå imod 0, og vi får, hvis vi kalder de to led hhv. p og q, at $0 \le p \le p+q \to 0$ samt $0 \le q \le p+q \to 0$, hvorpå

$$\frac{\mathrm{Re}\gamma(t_0+h)-\mathrm{Re}\gamma(t_0)}{h}-\mathrm{Re}a \to 0 \quad \text{og} \quad \frac{\mathrm{Im}\gamma(t_0+h)-\mathrm{Im}\gamma(t_0)}{h}-\mathrm{Im}a \to 0,$$

hvorpå $\mathrm{Re}\gamma$ og $\mathrm{Im}\gamma$ er differentiable i t_0. Et tilsvarende argument kan bruges den anden vej; lad $\mathrm{Re}\gamma'(t_0) = b$ og $\mathrm{Im}\gamma'(t_0) = c$, og sæt $a = b + ic$. $\square$

Bemærkning 8. Vi får altså i beviset givet for $t_0 \in I$ og en differentiabel kurve $\gamma : I \to \mathbb{C}$, at $\gamma'(t_0) = \mathrm{Re}\gamma'(t_0) + i\mathrm{Im}\gamma'(t_0)$.

Bemærkning 9. *(i)* Idet komplekse tal kan ses som vektorer i planet, får vi for enhver reel differentiabel funktion f defineret på et reelt interval I, at dens graf er svarende til kurven γ_f i $\mathbb{C}$ givet ved $\gamma_f(t) = t + if(t)$. Den tilhørende vektor er altså $(t, f(t))$.

Det er klart nu, at γ_f er differentiabel på I, og at $\gamma_f'(t) = 1+if'(t)$. Vektoren hørende til differentialkvotienten er altså $(1, f'(t))$, svarende til, at når vi går en enhed til højre på den reelle akse, går vi $f'(t)$ enheder opad på den imaginære akse. Vores almindelige grafiske intuition af tangenter i differentiabilitet for reelle funktioner kan altså overføres let til differentiable kurver lavet ud fra disse.

(ii) Betragter vi en vektorfunktion $I \to \mathbb{R}^2$ givet ved $t \mapsto (f(t), g(t))$, hvor $f, g : I \to \mathbb{R}$ er differentiable, og lader $t_0 \in I$, vil vi finde den tangerende linje til funktionen i $(f(t_0), g(t_0))$, og vi søger derfor at finde tangentvektoren. Vektorfunktionens differenskvotient er

$$\frac{(f(t_0+h), g(t_0+h)) - (f(t_0), g(t_0))}{h} = (\tfrac{1}{h}(f(t_0+h)-f(t_0)), \tfrac{1}{h}(g(t_0+h)-g(t_0))),$$

som går imod $(f'(t_0), g'(t_0))$, hvis vi lader $h \to 0$. Altså er tangentvektoren $(f'(t_0), g'(t_0))$.

Da vektorfunktionen kan identificeres med kurven $t \mapsto f(t) + ig(t)$ i $\mathbb{C}$ (idet de komplekse tal kan ses ved vektorer i $\mathbb{R}^2$), vil tangenten til vektorfunktionen i et punkt ligeledes blive overført til kurven. Vi ser også, at kurven er differentiabel, den afledte er selvfølgelig $t \mapsto f'(t) + ig'(t)$, og denne kan identificeres "tilbage" med tangentvektoren. Altså er tangentbegrebet let at overføre generelt fra differentiable vektorfunktioner $I \to \mathbb{R}^2$ til differentiable kurver $I \to \mathbb{C}$.

Tangentbegrebet defineres ud fra vores sædvanlige idé om tangenter.

Definition 10. Lad $\gamma : I \to \mathbb{C}$ være differentiabel i $t_0 \in I$ med differentialkvotient $\gamma'(t_0)$. Hvis $\gamma'(t_0) \neq 0$, definerer vi *tangenten til* γ *i* $\gamma(t_0)$ til at være afbildningen $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$T(s) = \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0).$$

Bemærkning 11. Vi kan selvfølgelig også gå den anden vej. Tangentens forskrift kan opdeles i en real- og en imaginærdel, og tangenten kan ses som en parametriseret vektorfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ved

$$T(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\gamma(t_0) \\ \mathrm{Im}\gamma(t_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\gamma'(t_0) \\ \mathrm{Im}\gamma'(t_0) \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tangentvektoren er altså $(\mathrm{Re}\gamma'(t_0), \mathrm{Im}\gamma'(t_0))$. Dette stemmer overens med, at kurven kan identificeres med vektorfunktionen $(\mathrm{Re}\gamma, \mathrm{Im}\gamma)$ med tilhørende tangentvektor. Her ses også, hvorfor vi er nødt til at antage, at $\gamma'(t_0) \neq 0$, for at det giver mening at tale om en tangent: nulvektoren er ikke en (specielt god) tangentvektor.

Eksempel 12 (*Eksempel 4 fortsat*)**.** *(i)* $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved $\gamma_1(t) = t + it^2$ har den afledte $\gamma_1'(t) = 1 + i2t$. Tangenten i $\gamma_1(1) = 1 + i$ er derfor

$$T(s) = 1 + i + s(1 + 2i);$$

set i $\mathbb{R}^2$ er parameterfremstillingen $T(s) = (1, 1) + s(1, 2)$, som udtrykker grafen for den reelle funktion $s \mapsto \frac{2}{1}(s - 1) + 1 = 2s - 1$.

(ii) $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved $\gamma_2(t) = \cos(t) + i \sin(t)$, som giver enhedscirklen i $\mathbb{C}$, har den afledte $\gamma_2'(t) = -\sin(t) + i \cos(t)$. I $\gamma_2(\pi/2) = i$ fås $\gamma_2'(t_0) = -1$. Tangenten er derfor $T(s) = i - s$; i $\mathbb{R}^2$ har vi $T(s) = (0, 1) + s(-1, 0)$ eller $s \mapsto 1$ ved $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bemærkning 13. En differentiabel kurve i $\mathbb{C}$ på et åbent interval er *ikke* holomorf, thi åbne intervaller i $\mathbb{R}$ ikke er åbne i $\mathbb{C}$.

Bemærkning 14 (*Geometrisk fortolkning af differentialkvotient for komplekst differentiabel funktion i z_0, når $f'(z_0) \neq 0$*)**.** Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $z_0 \in G$, og lad $f : G \to \mathbb{C}$ være holomorf i G. Vi kan lade en differentiabel kurve $\gamma : I \to G$ gå igennem z_0, så der findes $t_0 \in I$, så $\gamma(t_0) = z_0$.

Antag, at $\gamma'(t_0) \neq 0$. Da vil der findes en tangent til γ i $\gamma(t_0) = z_0$, og denne er på formen $z_0 + s\gamma'(t_0)$, $s \in \mathbb{R}$. Vi bider mærke i, at $\gamma'(t_0)$ også kan ses som en tangentvektor i det komplekse plan med modulus r_1 og argument α_1 (vinkel mellem realakse og vektor i positiv retning).

f vil sende kurven γ over i en ny differentiabel kurve $f \circ \gamma$ (at den er differentiabel, følger af beviset i Complex Analysis s. 13). Idet vi antager, at $f'(z_0) \neq 0$, vil $(f \circ \gamma)(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0$, vil der findes en tangent til $f \circ \gamma$ i $f(z_0)$ $(= (f \circ \gamma(t_0))$ på formen $f(z_0) + vf'(z_0)\gamma'(t_0)$, $v \in \mathbb{R}$.

$f'(z_0)$ er et komplekst tal med modulus r_2 og argument α_2. Betragter vi altså $f'(z_0)\gamma'(t_0)$ som tangentvektor for tangenten til $f \circ \gamma$ i $f(z_0)$, ser vi, at dennes længde er $r_1 r_2$, og at dens argument er $\alpha_1 + \alpha_2$.

Altså bestemmes tangentvektoren til billedkurven $f \circ \gamma$ i $f(z_0)$ ud fra tangentvektoren til kurven γ i z_0 ved at gange længden med $|f'(z_0)|$ og dreje vektoren $\arg(f'(z_0))$ *i positiv omløbsretning. Tangenten i sig selv drejes* $\arg(f'(z_0))$ *i positiv omløbsretning.*

Har vi slutteligt en anden differentiabel kurve $\tilde{\gamma}$ gående igennem z_0, hvor tangenten til $\tilde{\gamma}$ i z_0 har argument θ, vil foregående overvejelser give, at argumentet for tangentvektoren til $f \circ \tilde{\gamma}$ vil tillægges $\arg(f'(z_0))$ ligeså, med argument $\theta + \arg(f'(z_0))$. Vinkelforskellen mellem tangenterne til γ og $\tilde{\gamma}$ er $\theta - \alpha_1$.

Vi får nu, at vinkelforskellen mellem tangenterne til den nye billedkurve $f \circ \tilde{\gamma}$ og den gamle billedkurve $f \circ \gamma$ i $f(z_0)$ er $(\theta + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) = \theta - \alpha_1$. Altså bliver vinkelforskelle beholdt ved holomorfe funktioner. Specielt vil kurver gående igennem z_0, der har ortogonale tangenter i z_0, blive sendt til kurver med ortogonale tangenter i $f(z_0)$.

Hvis et punkt y_0 ligger tæt til venstre for den differentiable kurve γ i forhold til den retning, som kurven går i, kan vi lave en ret (differentiabel) kurve fra et punkt på kurven z_0, der ender i y_0. Vinkelforskellen mellem den rette kurve og tangenten til γ i z_0 vil da blive bibeholdt i billedet af f, og derfor vil punktet $f(y_0)$ også ligge til venstre for $f(z_0)$ i forhold til (retningen på) billedkurven $f \circ \gamma$.