SØLVKORN 5
Legemegøjl

Rasmus Sylvester Bryder

Der gælder for to legemer $F \subseteq K$, at hvis $[K : F] = 2^m$ og hvis f er et irreducibelt polynomium i $F[x]$ af grad 3, da er f også irreducibelt i $K[x]$.

Hvis f er irreducibelt af grad 3, har f ingen rødder i F. Antag, at f har en rod i K. Da findes $\alpha \in K$, så $f(\alpha) = 0$ i K. Det mindste dellegeme af K, der indeholder α og F, $F(\alpha)$, opfylder, at $[F(\alpha) : F] = 3$. Vi har nemlig, at $f(\alpha) = 0$, hvorfor $\deg \operatorname{Irr}(\alpha, F) \leq 3$.

Hvis $\deg \operatorname{Irr}(\alpha, F) < 3$, vil findes et polynomium $g := \operatorname{Irr}(\alpha, F)$ af grad 2 eller mindre med koefficienter i F, så $g(\alpha) = 0$. Dette g vil gå op i f i $F[x]$, thi g er frembringer for hovedidealet indeholdende alle polynomier i $F[x]$, hvori α er rod. Da har vi, at der findes $p \in F[x]$, så $f = pg$, hvilket er en ikke-triviel faktorisering, i modstrid med at f var antaget irreducibel. Altså må $[F(\alpha) : F] = 3$.

Pr. transitivitetssætningen gælder nu, at $[K : F] = [K : F(\alpha)][F(\alpha) : F]$, thi $F \subseteq F(\alpha) \subseteq K$. Altså vil gælde, at $3 \mid 2^m$, hvilket er en modstrid. Altså har f ingen rødder i K, hvorpå f er irreducibelt i $K[x]$.