Sølvkorn 6
Dimensioner af spaltningslegemer

Rasmus Sylvester Bryder

Lad f være et polynomium af grad n over et legeme K. Lad M_f være spaltningslegemet for f over K. Da gælder, at M/K er en endelig udvidelse; mere specifikt gælder, at $[M_f : K] \leq n!$.

Vi beviser ved induktion. For $n = 1$ er spaltningslegemet M lig K selv, thi g allerede er sin egen spaltning og K er det mindste legeme, der indeholder K, hvori dette kan lade sig gøre. Altså $[M : K] = 1 = 1!$.

Lad $n > 1$. Antag, at det gælder for alle polynomier f af grad n over et legeme K, at $[M_f : K] \leq n!$ (hvor M_f er spaltningslegemet for f over K).

Betragt polynomiet $g \in K[x]$ af grad $n+1$. Hvis g spaltes i lineære faktorer i $K[x]$, vil $[M_g : K] = 1 \leq (n+1)!$. Ellers vil gælde, at g er delelig med et irreducibelt, monisk polynomium $p \in K[x]$ af grad $k \leq n+1$. Vi ved, at p spaltes i M_g; p har altså en rod $\alpha \in M_g$, og dermed i $K(\alpha)$. Altså må

$$[K(\alpha) : K] = \deg \operatorname{Irr}(\alpha, K) = \deg p = k \leq n+1.$$

g har også roden α i $K(\alpha)$. Altså vil gælde i $K(\alpha)[x]$, at $g(x) = (x-\alpha)g_1(x)$, hvor g_1 er et polynomium af grad n i $K(\alpha)[x]$. Vi har derfor pr. antagelse, at $[M_{g_1} : K(\alpha)] \leq n!$.

Vi har, at $M_{g_1} \subseteq M_g$, thi g og dermed g_1 spaltes i lineære faktorer i M_g. Endvidere må $M_g \subseteq M_{g_1}$, thi g_1 spaltes i lineære faktorer i M_{g_1}, hvormed g også gør det.

Vi får nu, at

$$[M_g : K] = [M_g : M_{g_1}][M_{g_1} : K(\alpha)][K(\alpha) : K] \leq 1 \cdot n! \cdot (n+1) = (n+1)!.$$