SØLVKORN 8
Topologi og konvergente net

Rasmus Sylvester Bryder

Målet med dette korn er at vise sammenhængen mellem topologier og de konvergente net på en mængde X.

Definition 1. *Hvis $(A, \leq)$ er en mængde med en ordning, således at der for vilkårlige $a, b \in A$ findes $c \in A$, så $a \leq c$ og $b \leq c$, kaldes A en* **rettet mængde**.

Eksempel 2. $\mathbb{N}$ er en rettet mængde; ditto $\mathbb{R}$.

Definition 3. *Lad X være en mængde. En funktion $\alpha : A \to X$, hvor A er en rettet mængde, kaldes et* **net**. *Vi vælger i praksis at definere $\alpha_a := \alpha(a)$; et net angives typisk ved $(\alpha_a)_{a \in A}$.*

Eksempel 4. Alle følger er net, med $A = \mathbb{N}$.

Definition 5. *Lad $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Et net $(\alpha_a)_{a \in A}$ i X siges at være* **konvergent med grænsepunkt** *$\lambda \in X$, hvis der for enhver omegn U af λ findes $N \in A$, så $a \geq N$ medfører $\alpha_a \in U$. Vi skriver $\alpha_a \to \lambda$.*

Bemærkning 6. Bemærk, at vi ikke kræver, at X er et Hausdorff-rum, hvorpå nettet sagtens kan have flere grænsepunkter.

Sætning 7. *Hvis der gælder for to topologier $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ på X, at $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, vil alle konvergente net i en af topologierne være konvergente i den anden, med samme grænsepunkter.*

Bevis. Åbenlyst. □

En velkendt sætning fra topologi følger:

Sætning 8. *Lad $A \subseteq X$, hvor $(X, \mathcal{T})$ er et topologisk rum. $\overline{A}$ består af alle grænsepunkter for net i A.*

Bevis. Lad $x \in \overline{A}$ og lad $\mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{T}$ være systemet af omegne af x. Vi kan gøre $\mathcal{O}_x$ til en rettet mængde ved at indføre ordningen $U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$, altså ved omvendt inklusion – relationen er dermed refleksiv, antisymmetrisk og transitiv, og da $\mathcal{O}_x$ er stabil under snit, er $\mathcal{O}_x$ en rettet mængde. Vælg nu $x_U \in U \cap A$ for $U \in \mathcal{O}_x$, hvilket er ladsiggørligt, da enhver omegn af x snitter A, idet $x \in \overline{A}$. (x_U) er nu et net i A, og vi har for enhver omegn V af x, at hvis $U \geq V$, vil $x_U \in U \subseteq V$, så $x_U \to x$.

Lad omvendt y være grænsepunkt for et net i A, $(y_a)_{a \in J}$. Lad U være en omegn af x. Der findes nu $b \in J$, så $y_a \in U$ for $a \geq b$. Da $y_a \in A$ for alle a, vil $y_b \in A \cap U$, så $A \cap U \neq \emptyset$ og $x \in \overline{A}$. □

I lang tid undrede det mig, hvorledes det kunne lade sig gøre, at to systemer af åbne mængder $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ var ens, hvis alle net, der var konvergente i den ene, også var i den anden, med samme grænsepunkter. Dette er mit bud på, hvorledes det kan lade sig gøre.

Bevis. Lad $B \in \mathcal{T}$. Da vil $B^c = \overline{B^c}$ i $(X, \mathcal{T})$, så B^c i $(X, \mathcal{T})$ består udelukkende af grænsepunkter for sine egne net. Vi vil vise, at $B^c = \overline{B^c}$ i $(X, \mathcal{T}')$ (vi husker, at kun afslutningerne afhænger af hvilke topologier, der tages i brug – B^c er uafhængig, thi B blot kan betragtes som en mængde).

Lader vi x være et grænsepunkt for et net (x_a) i B^c i $(X, \mathcal{T}')$, vil dette net altså også være konvergent med samme grænsepunkt x i $(X, \mathcal{T})$, hvilket følger af antagelsen. x vil altså ligge i $\overline{B^c} = B^c$ i $(X, \mathcal{T})$. Altså er $\overline{B^c} = B^c$ i $(X, \mathcal{T}')$, hvorpå $B \in \mathcal{T}'$. Den anden inklusion vises analogt. $\square$

Lades $\mathcal{X}$ være mængden af konvergente net (med grænsepunkter) på et topologisk rum $(X, \mathcal{T})$, kan vi nu betragte $(X, \mathcal{X})$. Vi vil forsøge ud fra denne sammensætning at danne en topologi og vise, at vi får den samme tilbage.

Lades $A \subseteq X$, defineres $\overline{A}$ som værende mængden bestående af alle grænsepunkter for konvergente net indeholdt i A. En delmængde kaldes lukket, hvis $A = \overline{A}$. Vi har, at $\emptyset$ og X er lukkede. Lades en vilkårlig familie af lukkede mængder A_i være givet, vil $x \in \overline{\bigcap A_i}$ medføre, at x er grænsepunkt for et konvergent net i $\bigcap A_i$. Nettet er indeholdt i alle A_j, som er lukkede, så grænsepunktet er også indeholdt i alle, og dermed er $\bigcap A_i$ lukket. Lades en endelig familie af lukkede mængder A_k være givet, vil $x \in \overline{\bigcup A_k}$ medføre, at x er grænsepunkt for et konvergent net i $\bigcup A_k$. Der må findes et l, så $x \in A_l$. Hvis ikke, ville der for *alle* delnet opnået ved restriktion af netelementer til hvert enkelt A_k gælde, at de ikke konvergerede imod x, hvilket ikke er muligt, eftersom delnet har samme grænsepunkt som nettet selv – hvis de konvergerede imod x, ville $x \in \overline{A_k} = A_k$. Altså er foreningen lukket.

Dette giver os en topologi $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ ved at definere en åben mængde som værende komplementet til en lukket (det følger af De Morgans love). Men er denne den samme som $\mathcal{T}$?

Svaret er ja. Hvis $A \in \mathcal{T}$, vil A^c være lukket og bestå af sine grænsepunkter. Dermed er A^c lukket i $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$-forstand. Hvis $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$, vil et $x \in A^c \subseteq X$ være grænsepunkt for et konvergent net $(x_a)_{a \in J}$ i A^c. For enhver omegn $U \in \mathcal{T}$ af x findes altså $N \in J$, så $x_a \in U$ for $a \geq N$. Dvs. at $x_a \in A^c \cap U$ for alle $a \geq N$, så $A^c \cap U \neq \emptyset$, og A^c er lukket i $\mathcal{T}$-forstand.