

SØLVKORN 9

Syvtonersskalaer

Rasmus Sylvester Bryder

Det undrede mig i lang tid, om man kunne lave en skala, således at man undgik en tritonus mellem to af tonerne. Det viser sig ret hurtigt, at det problem ikke kan løses.

Sætning 1. *For hver syv forskellige tal i mængden $\{1, \dots, 12\}$ findes to tal blandt de syv, så afstanden mellem dem er 6.*

Bevis. Vi benytter skuffeprincippet: lav 6 skuffer med mængder $\{n, n + 6\}$ for $n \in \{1, \dots, 6\}$ og placér de syv tal deri. Da findes en skuffe med mere end ét tal, ergo er begge tal i mængden hørende til blandt de syv oprindeligt valgte, og dermed er afstanden 6. \square

Dermed følger det ønskede om syvtonersskalaer; enhver sådan består af syv toner fra c (1) til h (12), som bare tildeles talværdier. Spørgsmålet er om det gælder for afstande mindre end 6?

For tilfældene 1, 2 og 3 er det let: lav 6 skuffer henholdsvis på formen $\{n, n + 1\}$ for $n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $\{n, n + 2\}$ for $n \in \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$ og $\{n, n + 3\}$ for $n \in \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$. 4 og 5 kan kun klares i skalatilfældet: de to mængder $\{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11\}$ og $\{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12\}$ går ikke her. Det første tilfælde klares ved at lave 4 skuffer $\{n, n + 4, n + 8\}$ for $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ - der må være mindst to af de syv tal i en af skufferne, således at der er en stor tert mellem mindst to toner - og det andet klares ved at stille tallene op i rækkefølge $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 11, a_4 = 4$ etc.; der laves da skuffer $\{a_i, a_{i+1}\}$ for $i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; skuffeprincippet giver da, at to af tonerne har kvartafstand.