Sølvkorn 11
Eksponentialfunktioner og logaritmer

Rasmus Sylvester Bryder

Findes der for $b, y > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, så $b^x = y$? Svaret er ja (undtagen for $b = 1$, $y \neq 1$), og det er alment kendt, at logaritmefunktionen gør et godt stykke arbejde i den sammenhæng. Men hvad er logaritmefunktionen, og hvordan defineres den? Vi vil i dette korn forsøge at definere dem som inverser til eksponentialfunktioner på $\mathbb{R}$. Først må vi dog definere en sådan eksponentialfunktion; giver det mening at tale om b^x? Svaret er ja, hvis vi samtidig gerne vil sørge for, at den er kontinuert.

1 Den kontinuerte udvidelse af b^q

For $b > 0$ giver det mening at definere funktionen $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ved $g(q) = b^q$ (vi tager den n'te rod af b, hvor n er nævneren og opløfter i tælleren). Funktionen ses let at være veldefineret. Potensregnereglerne følger let for rationale eksponenter.

Sætning 1. *Funktionen $g_b : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ved $g_b(q) = b^q$ kan udvides til en og kun én kontinuert funktion $\tilde{g}_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

For at gøre dette vil vi for ethvert irrationalt tal lade b^x være grænsen for b^q for $q \to x$. Vi vil nu retfærdiggøre dette ved hjælp af Arkimedes' princip og supremumsegenskaben. Vi vil i det følgende (af *meget* gode grunde) antage, at $b \neq 1$, idet tilfældet $b = 1$ er klaret af den kontinuerte funktion $x \mapsto 1$.

Lemma 2. *For ethvert $x \in \mathbb{R}$ findes en følge (q_n) i $\mathbb{Q}$, så $q_n \nearrow x$ og en anden følge (r_n) i $\mathbb{Q}$, så $r_n \searrow x$. Specielt er $\mathbb{Q}$ tæt i $\mathbb{R}$ i den sædvanlige metrik.*

Bevis. Vi antager, at $x \notin \mathbb{Q}$ (thi vi ellers kan benytte en konstant følge). Vi kan endvidere antage, at $x > 0$; når begge dele er vist, følger det negative tilfælde af at vælge følger for $-x$, hvormed de tilsvarende negative følger konvergerer op og ned imod x.

Vi vil konstruere (q_n) så q_n får den $(n-1)$'te decimal med fra x. Lad $n \in \mathbb{N}$. Lad N_n være det mindste naturlige tal så $N_n > 10^n x$ (muligt ved Arkimedes' princip og supremumsegenskaben), og lad

$$q_n = \frac{N_n - 1}{10^n}.$$

Det er klart, at $q_n < x$, da $N_n - 1 < 10^n x$ (hvis der gjaldt andet, ville x enten være rational eller der ville være strid imod at N_n var valgt mindst muligt) og $N_n - 1$ er det største naturlige tal mindre end $10^n x$ (var der et større, ville $N_n \leq 10^n x$), og at $|q_n - x| < 10^{-n}$. Hvis nemlig $|q_n - x| > 10^{-n}$, ville $10^n(x - q_n) > 1$ samtidig med at

$$10^n(x - q_n) = 10^n x - (N_n - 1) < 1.$$

Sidst mangler vi at vise, at (q_n) er voksende. Vi har, at $N_{n+1} - 1$ er det største naturlige tal mindre end $10^{n+1}x$, hvormed $10(N_n - 1) \leq N_{n+1} - 1$ og $q_n \leq q_{n+1}$. Altså vil $q_n \nearrow x$. Inspireret af ovenstående vælger vi $r_n = 10^{-n}N_n$, hvormed $|r_n - x| = |q_n + 10^{-n} - x| < |q_n - x| + 10^{-n} < 2 \cdot 10^{-n}$ og $r_n \searrow x$, thi $10N_n \geq N_{n+1}$. □

Lemma 3. *Hvis $b > 0$ og $q_1 \leq q_2$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, er $b^{q_1} \leq b^{q_2}$, hvis $b > 1$, og $b^{q_1} \geq b^{q_2}$, hvis $0 < b < 1$.*

Bevis. Tilfældet $q_1 = q_2$ er trivielt, så antag, at $q_1 < q_2$. Antag først, at $b > 1$. Lad $q \in \mathbb{Q}_+$ og skriv $q = r/s$, hvor $s > 0$. Da er $\sqrt[s]{b} > 1$, thi hvis ikke, ville

$$b = (\sqrt[s]{b})^s \leq (\sqrt[s]{b})^{s-1} \leq \cdots \leq 1,$$

en modstrid. Dermed er $b^q > 1$. Lad $q = q_2 - q_1$; da er $b^{q_2 - q_1} > 1$ og voilà. Antag derpå, at $0 < b < 1$. Da er $b^{-1} > 1$, hvormed $(b^{-1})^{q_2 - q_1} > 1$ og $b^{q_1 - q_2} < 1$. □

Herpå følger en række lemmaer om konvergens.

Lemma 4 (Bernoullis ulighed)**.** $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$ *og* $x > -1$.

Bevis. Vi beviser ved induktion. Sætningen er tydeligt klar for $n = 0$. Antag, at det er sandt for $n = m$. Da er

$$(1 + x)^{m+1} \geq (1 + x)(1 + mx) = 1 + (m + 1)x + mx^2 \geq 1 + (m + 1)x,$$

af hvilket det ønskede følger. □

Lemma 5. *Hvis $b > 1$ og $n \in \mathbb{N}$, er*

$$1 - \frac{b}{n} < b^{-\frac{1}{n}} < 1 < b^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{b}{n}.$$

Bevis. $1 < b^{\frac{1}{n}}$ er klart. Antagelsen om at $b^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{b}{n}$ medfører, at

$$b \geq \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{b}{n} = b + 1$$

(grundet Bernoullis ulighed), altså en modstrid. De to andre uligheder fås ved at tage reciprokke, thi $(1 + \frac{b}{n})^{-1} = \frac{n}{n+b} = 1 - \frac{b}{n+b} > 1 - \frac{b}{n}$. □

Lemma 6. *Lad $b > 0$. Der findes for alle $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, så*

$$|q| < \delta,\ q \in \mathbb{Q} \Rightarrow |b^q - 1| < \varepsilon.$$

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ og lad $n \in \mathbb{N}$, så $n > \frac{b}{\varepsilon}$. For $-\frac{1}{n} < q < \frac{1}{n}$, $q \in \mathbb{Q}$, vil

$$-\frac{b}{n} \leq b^{-\frac{1}{n}} - 1 < b^q - 1 < b^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{b}{n}$$

jf. Lemma 3 og Lemma 5. Altså vil $|b^q - 1| < \frac{b}{n} < \varepsilon$ for $|q| < \frac{1}{n}$. □

Vi er nu klar til den første store sætning.

Sætning 7. *Lad $b > 1$ og $x \in \mathbb{R}$. Der findes ét $a \in \mathbb{R}$, så der for alle $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så*

$$|q - x| < \delta,\ q \in \mathbb{Q} \Rightarrow |a - b^q| < \varepsilon.$$

Bevis. Lad (r_n) være en følge i $\mathbb{Q}$ så $r_n \searrow x$, altså så $|r_n - x| < \frac{1}{n}$ (ladsiggørligt ved Lemma 2).

(i) Lad $\varepsilon > 0$. Vi har jf. Lemma 3, da $r_m \le r_1$ for alle $m \in \mathbb{N}$, at

$$|b^{r_n} - b^{r_m}| = b^{r_m}|b^{r_n - r_m} - 1| \le b^{r_1}|b^{r_n - r_m} - 1|.$$

Vælg med Lemma 6 et $\delta > 0$ så $|q| < \delta$, $q \in \mathbb{Q}$ medfører $|b^q - 1| < \varepsilon b^{-r_1}$. Da (r_n) er Cauchy, findes $N \in \mathbb{N}$ så $|r_n - r_m| < \delta$ for $n, m \ge N$. For $n, m \ge N$ vil altså gælde, at $|b^{r_n} - b^{r_m}| < \varepsilon$, hvormed (b^{r_n}) er Cauchy i $\mathbb{R}$ og dermed konvergent mod et tal $a \in \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ er fuldstændig.

(ii) Lad $\varepsilon > 0$ og vælg jf. Lemma 6 et $\delta_1 > 0$ så $|p| < \delta_1$, $p \in \mathbb{Q}$, medfører $|b^p - 1| < \frac{\varepsilon}{2b^{r_1}}$. Lad $N_1 \in \mathbb{N}$ så $N_1 > 2\delta_1^{-1}$. Lad endvidere $N_2 \in \mathbb{N}$, så $n \ge N_2$ medfører $|b^{r_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pr. *(i)*. Lad $N = \max\{N_1, N_2\}$ og sidst $\delta = N^{-1}$.

For $|x - q| < \delta$, $q \in \mathbb{Q}$, har vi altså

$$|q - r_n| \le |q - x| + |x - r_N| < 2N^{-1} \le 2N_1^{-1} < \delta_1,$$

hvormed $|b^{q - r_N} - 1| < \frac{\varepsilon}{2b^{r_1}}$. Nu vil

$$|b^q - a| \le |b^q - b^{r_N}| + |b^{r_N} - a| < b^{r_1}|b^{q - r_N} - 1| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Altså har vi det ønskede.

(iii) Antag, at $c \in \mathbb{R}$ opfylder betingelsen og lad $\varepsilon > 0$. Der findes $\delta_1, \delta_2 > 0$ så betingelsen er opfyldt med ε for henholdsvis a og c. For $|q - x| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $q \in \mathbb{Q}$, vil $|a - c| \le |a - b^q| + |b^q - c| < 2\varepsilon$. Da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, må $a = c$, hvormed a er entydigt bestemt. □

Vi kan nu, med Sætning 7, bevise Sætning 1.

Bevis for Sætning 1. Lad først $b > 1$. For alle $x \in \mathbb{R}$ lades $\tilde{g}_b(x)$ være det a, der blev fundet for det konkrete x i Sætning 7.

Vi viser nu, at $\tilde{g}$ faktisk er kontinuert på hele $\mathbb{R}$. Lad $\varepsilon > 0$ og vælg et $\delta > 0$ så betingelsen i Sætning 7 er overholdt med $\frac{\varepsilon}{2}$. Lad endvidere $q \in \mathbb{Q}$ så $|q - x| < 2^{-1}\delta$ jf. Lemma 2. For de $y \in \mathbb{R}$ så $|y - x| < 2^{-1}\delta$, vil $|y - q| < \delta$ grundet trekantsuligheden, hvormed

$$|\tilde{g}_b(y) - \tilde{g}_b(x)| \le |\tilde{g}_b(y) - b^q| + |b^q - \tilde{g}_b(x)| < \varepsilon.$$

Der findes kun én kontinuert udvidelse f af $q \mapsto b^q$, thi kontinuitet af f medfører betingelsen i Sætning 7, hvormed $f(x) = \tilde{g}_b(x)$.

For $0 < b < 1$ lades $\tilde{g}_b(x) = \tilde{g}_{b^{-1}}(-x)$, som også er kontinuert på $\mathbb{R}$. □

Definition 8. For alle $b > 0$ defineres $b^x := \tilde{g}_b(x)$. $\mathbb{R} \ni x \mapsto b^x$ kaldes *eksponentialfunktionen med grundtal b*.

De kendte regneregler gælder stadig, thi vi for alle reelle x nu bare kan vælge rationale følger, der går imod dem:

Sætning 9 (Regneregler for eksponentialfunktioner). *For $a, b > 0$ og $x, y \in \mathbb{R}$ gælder:*

(i) $b^{x+y} = b^x b^y$
(ii) $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$
(iii) $(b^x)^y = b^{xy}$
(iv) $(ab)^x = a^x b^x$
(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Bevis. Lad $x_m \to x$, $y_n \to y$, $x_m, y_n \in \mathbb{Q}$. *(i)* og *(iv)* følger let af kontinuitet. *(iii)* følger af, at

$$(b^x)^y = (b^{\lim_m x_m})^{\lim_n y_n} = \lim_{n,m} (b^{x_m})^{y_n} = \lim_{n,m} b^{x_m y_n}.$$

(ii) følger af ovenstående, samt *(i)*; *(v)* følger af ovenstående, samt *(iv)*. □

Sætning 10. *Hvis $b > 0$ og $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$, er $b^x < b^y$, hvis $b > 1$, og $b^x > b^y$, hvis $0 < b < 1$.*

Bevis. Lad $s > 0$ og $q_n \nearrow s$, $r_n \searrow s$, hvor $q_n, r_n \in \mathbb{Q}$. Hvis $b > 1$, er (b^{q_n}) voksende jf. Lemma 3, og altså må $b^s \geq b^{q_n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ (thi hvis ikke, ville b^{q_n} ikke konvergere imod b^s). Hvis der ikke fandtes $n \in \mathbb{N}$, så $q_n > 0$, ville $q_n \leq 0$ for alle n, i modstrid med $q_n \nearrow s$. Altså vil $b^s \geq b^{q_n} > b^0 = 1$. For $0 < b < 1$ vil $(b^s)^{-1} = (b^{-1})^s > 1$ jf. regneregel *(iii)*, hvormed $b^s < 1$. Sæt nu $s = x - y$ og benyt regneregel *(ii)*. □

Lemma 11. *For alle rationale tal $a \geq 2$ og for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $a^n > n$.*

Bevis. Jf. Lemma 5 er $1 < n^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{n}{n} \leq a$. □

Lemma 12. *For $b > 0$ har $x \mapsto b^x$ værdimængde $(0, \infty)$.*

Bevis. Lad først $b > 1$. Lad $N \in \mathbb{N}$, så $N > \frac{1}{b-1}$. Ved Bernoullis ulighed er

$$b^{N+n} \geq 1 + (N+n)(b-1) = 1 + N(b-1) + n(b+1) > 2.$$

Altså er $b^{(N+n)^2} > N + n$ jf. Lemma 11. Det følger nu, at $x \mapsto b^x$ er ubegrænset opadtil. Hvis $b^x \leq 0$, ville der grundet Sætning 10 gælde, at $b^q < 0$ for et rationalt $q < x$ – en modstrid. Ved at tage reciprokke følger det nu for $0 < b < 1$. □

Sætning 13. *Lad $b > 0$, $b \neq 1$. For alle $c > 0$ har ligningen $c = b^x$ én løsning, hvormed $x \mapsto b^x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, har en invers.*

Bevis. Grundet foregående lemma har ligningen en løsning. Da $x \mapsto b^x$ er strengt monoton jf. Sætning 10, er der kun den ene løsning. □

Definition 14. En funktion $f : A \to B$ mellem to partielt ordnede mængder A og B siges at *bevare orden*, hvis $a_1 < a_2$ medfører $f(a_1) < f(a_2)$ for alle $a_1, a_2 \in A$, og at *vende orden* hvis $a_1 < a_2$ medfører $f(a_1) > f(a_2)$ for alle $a_1, a_2 \in A$.

Sætning 15. *Lad A, B være partielt ordnede mængder, begge udstyret med ordenstopologien. En kontinuert og bijektiv funktion $f : A \to B$, som enten bevarer eller vender orden, har en kontinuert invers f^{-1}, som bevarer orden, hvis f gør det, og omvendt (man siger, at de har samme orden).*

Bevis. Lad G være åben i A. Hvis A ikke har et største eller mindste element, kan vi skrive $G = \bigcup_i (a_i, b_i)$. For alle i er $f((a_i, b_i))$ sammenhængende, thi f er kontinuert, hvormed $f((a_i, b_i))$ er et åbent interval, thi f enten bevarer eller vender orden. Nu er

$$(f^{-1})^{-1}(G) = f(G) = \bigcup_i f((a_i, b_i)) = \begin{cases} \bigcup_i (f(a_i), f(b_i)) & f \text{ bevarer orden} \\ \bigcup_i (f(b_i), f(a_i)) & f \text{ vender orden,} \end{cases}$$

som uanset hvad er åben i B. I tilfældet hvor A har et største og/eller mindste element indses, at B har et største og/eller mindste element (afhængigt af f), og hvis G indeholder et eller begge af disse endepunkter, vil $f(G)$ stadig være åben grundet definitionen af ordenstopologien. At f^{-1} har samme orden som f følger af bijektivitet. □

Definition 16. Lad $b > 0$, $b \neq 1$. *Logaritmefunktionen med grundtal b* defineres til at være den inverse funktion til $x \mapsto b^x$ og betegnes $\log_b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Det følger af Sætning 15, at $\log_b$ er kontinuert og har samme orden som $x \mapsto b^x$.

Sætning 17 (Regneregler for logaritmefunktioner)**.** *For $a, b, x, y > 0$, $a, b \neq 1$, $r \in \mathbb{R}$ gælder:*

(i) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(ii) $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(iii) $\log_b(x^r) = r \log_b(x)$

(iv) $\log_b(x) = \log_b(a) \log_a(x)$

Bevis. Vi benytter regnereglerne for eksponentialfunktionen. *(i)* følger af ligheden

$$b^{\log_b(xy)} = xy = b^{\log_b(x)} b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x) + \log_b(y)}.$$

Da der kun er én løsning $c \in \mathbb{R}$ til ligningen $b^c = xy$, må $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$. *(iii)* følger samme princip, idet $b^{\log_b(x^r)} = x^r = (b^{\log_b(x)})^r = b^{r \log_b(x)}$. Nu følger *(ii)*, og *(iv)* følger af $x = a^{\log_a(x)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_a x} = b^{\log_b(a) \log_a(x)}$. □

Altså er vi, ud fra et ønske om at bestemme en funktion som kan løse ligningen $y = b^x$, endt med en, som gør det, og som opfylder alle de regler vi er vant til, at den gør. But wait, there's more.

2 Differentiabilitet af b^x

Vi kan faktisk benytte alt det foregående, samt noget nyt, til at vise, at eksponentialfunktioner og logaritmefunktioner er uendeligt ofte differentiable! Vi starter med at generalisere Bernoullis ulighed.

Lemma 18. $(1 + x)^r \geq 1 + rx$ *for* $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$ *og* $x > 0$.

Bevis. *(i)* Lad $n \in \mathbb{N}$. Med Bernoullis ulighed (Lemma 4) får vi

$$\begin{aligned} \frac{(1+\frac{x}{n+1})^n}{(1+\frac{x}{n})^n} &= \left(\frac{n(n+1)+nx}{(n+1)(n+x)}\right)^n = \left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n \\ &\geq 1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}. \end{aligned}$$

Vi har nu, at

$$\begin{aligned} & (n+1)^2(n+x)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\frac{(1+\frac{x}{n+1})^n}{(1+\frac{x}{n})^n} \\ \geq\ & (n+1)^2(n+x)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) \\ =\ & ((n+1)+x)((n+1)(n+x)-nx) \\ =\ & (n+1)^2(n+x)+x((n+1)(n+x)-n(n+1)-nx) \\ =\ & (n+1)^2(n+x)+x^2 \\ \geq\ & (n+1)^2(n+x); \end{aligned}$$

dermed er følgen $(1+\frac{x}{n})^n$ voksende, for alle $x > -1$.

(ii) Vi viser først uligheden for $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$. For $q = \frac{r}{s} \geq 1$ er $r \geq s$, hvormed $(1+\frac{y}{r})^r \geq (1+\frac{y}{s})^s$ for $y > 0$ jf. *(i)*. Dermed er

$$\left(1+\frac{rx}{r}\right)^r \geq \left(1+\frac{rx}{s}\right)^s = (1+qx)^s > 1.$$

Ved at tage den s'te rod fås det ønskede. Lad nu $q_n \searrow r$, $q_n \in \mathbb{Q}$. Da vil $(1+x)^r - (1+rx) = \lim_n[(1+x)^{q_n} - (1+q_nx)] \geq 0$, grundet kontinuitet af $y \mapsto (1+x)^y$, og det ønskede er vist. □

Lemma 19. *En monoton, begrænset følge (x_n) i $\mathbb{R}$ er konvergent.*

Bevis. Hvis (x_n) er voksende, har $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ifølge supremumsegenskaben et supremum x. Lad $\varepsilon > 0$. Der findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_N > x-\varepsilon$, thi ellers ville $x-\varepsilon$ være en majorant for $\{x_n\}$. Da må $x_n > x-\varepsilon$ for $n \geq N$. Da er $x-\varepsilon < x_n \leq x < x+\varepsilon$ for $n \geq \mathbb{N}$ og $x_n \to x$.

Hvis (x_n) er aftagende, har $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har ifølge supremumsegenskaben et infimum x. Lad $\varepsilon > 0$. Der findes et $N \in \mathbb{N}$ så $x_N < x+\varepsilon$, thi ellers ville $x+\varepsilon$ være en minorant for $\{x_n\}$. Da må $x_n < x+\varepsilon$ for $n \geq N$. Da er $x-\varepsilon < x \leq x_n < x+\varepsilon$ for $n \geq \mathbb{N}$ og $x_n \to x$. □

Lemma 20 (Pergler)**.** *Funktionen $h \mapsto F(b,h) = h^{-1}(b^h-1)$, $b > 0$, $h \neq 0$ er voksende.*

Bevis. Lad først $b > 1$. For $h \neq 0$ fremgår klart, at $F(b,kh) = k^{-1}F(b^k,h)$ for $k \neq 0$. For $h \geq 1$ gælder jf. Lemma 18, at

$$F(b,h) = \frac{(1+(b-1))^h-1}{h} \geq \frac{1+h(b-1)-1}{h} = b-1.$$

Dermed vil for $k > 0, h \geq 1$ gælde, at

$$F(b,kh) = k^{-1}F(b^k,h) \geq k^{-1}(b^k-1) = F(b,k).$$

Dermed vil gælde for $0 < h_1 \leq h_2$, at $F(b, h_1) \leq F(b, h_2)$. For $k \geq 1$, $h < 0$, vil

$$F(b, kh) = \frac{1}{h} F(b^h, k) \leq \frac{1}{h}(b^h, k) = F(b, h),$$

da $\frac{1}{h} < 0$. Altså er F også voksende for $b > 1$. For $0 < b < 1$ fås for $h_1 \leq h_2$, $h_1, h_2 \neq 0$, at

$$F(b, h_1) = -F(b^{-1}, -h_1) \leq -F(b^{-1}, -h_2) = F(b, h_2),$$

og vi konkluderer altså at $h \mapsto h^{-1}(b^h - 1)$ er voksende uanset $b > 0$. □

Lemma 21 (Pergler)**.** *Funktionen $F(b, h) = h^{-1}(b^h - 1)$, $b > 0$, $h \neq 0$ har for fast b en grænseværdi $\mu(b)$ for $h \to 0$.*

Bevis. Følgen $(F(b, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ er aftagende, og da $0 < F(b, \frac{1}{n}) \leq b - 1$, er den begrænset, hvormed den ved Lemma 19 konvergerer mod et tal $\mu(b) \in \mathbb{R}$.

Lad $\varepsilon > 0$ og lad $N \in \mathbb{N}$ så $n \geq N$ medfører $|F(b, \frac{1}{n}) - \mu(b)| < \varepsilon$. Lad $0 < h < \frac{1}{N}$; da findes $M \in \mathbb{N}$, så $\frac{1}{M} < h$, hvormed $\mu(b) \leq F(b, \frac{1}{M}) \leq F(b, h)$, og

$$|F(b, h) - \mu(b)| = F(b, h) - \mu(b) \leq |F(b, \tfrac{1}{N}) - \mu(b)| < \varepsilon.$$

Altså vil $F(b, h) \to \mu(b)$ for $h \to 0^+$, og da $F(b, -h) = b^{-h} F(b, h) \to \mu(b)$ for $h \to 0^+$, vil det gælde generelt for $h \to 0$.

For $0 < b < 1$ vil $F(b^{-1}, h) \to \mu(b^{-1})$, hvormed

$$F(b, h) = b^h h^{-1}(1 - b^{-h}) = -b^h h^{-1}((b^{-1})^h - 1) \to -\mu(b^{-1})$$

for $h \to 0$. Ved at sætte $\mu(b) := -\mu(b^{-1})$ fås det ønskede. □

Sætning 22. *Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ givet ved $f(x) = b^x$ er uendeligt ofte differentiabel for alle $b > 0$ med differentialkvotient $f'(x) = \mu(b) b^x$.*

Bevis. Følger af Lemma 21, da $h^{-1}(b^{x+h} - b^x) = b^x F(b, h)$. □

Næste sætning karakteriserer eksponentialfunktioner og logaritmefunktioner som entydige kontinuerte løsninger til funktionalligninger.

Sætning 23. *Hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ er kontinuert og $f(x + y) = f(x) f(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$, er $f(x) = b^x$ for et $b > 0$.*

Bevis. Lad $a > 0$, $a \neq 1$ samt $x, y \in \mathbb{R}$. Da vil $\log_a(f(x + y)) = \log_a(f(x)) + \log_a(f(y))$. Altså opfylder den kontinuerte funktion $\log_a \circ f$ Cauchys funktionalligning, og der findes derfor $c \in \mathbb{R}$, så $\log_a(f(x)) = cx$. Men da er $f(x) = b^x$, hvor $b = a^c$. □

Sætning 24. *Hvis $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er kontinuert og $f(xy) = f(x) + f(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$, er $f(x) = \log_b(x)$ for et $b > 0$, $b \neq 1$.*

Bevis. For $x, y \in \mathbb{R}$ og $a > 0$, $a \neq 1$, er $f(a^{x+y}) = f(a^x) + f(a^y)$. Dermed opfylder $f(a^x)$ Cauchys funktionalligning, så der findes $c \in \mathbb{R}$, så $f(a^x) = cx$. Da må $f(x) = f(a^{\log_a(x)}) = c \log_a(x)$, og for $b = a^{1/c}$ vil $f(x) = \log_b(x)$. □

Sætning 25 (Pergler)**.** *Der findes $a > 0$, $a \neq 1$, så $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ givet i Lemma 21 er lig $\log_a$.*

Bevis. Lad F betegne funktionen fra Lemma 21.

(i) For $x, y > 0$ vil

$$\begin{aligned} F(xy,h) &= \frac{(xy)^h - 1}{h} = \frac{x^h y^h - x^h + x^h - 1}{h} = \frac{x^h(y^h - 1) + (x^h - 1)}{h} \\ &= x^h F(y,h) + F(x,h) \\ &\to \mu(y) + \mu(x), \end{aligned}$$

så $\mu(xy) = \mu(x) + \mu(y)$.

(ii) For alle $b > 0$ har vi jf. Lemma 21, at

$$1 - b^{-1} = F(b, -1) = -F(b^{-1}, 1) \leq -\mu(b^{-1}) = \mu(b) \leq F(b, 1) = b - 1,$$

hvorpå $\mu(b) \to 0$ for $b \to 1$. For Lad nu $c \in \mathbb{R}_+$. For $x \to c$, vil $\frac{x}{c} \to 1$, hvormed $\mu(x) = \mu(\frac{x}{c}) + \mu(c) \to \mu(c)$. Altså vil $\mu(x) \to \mu(c)$, hvorpå μ er kontinuert. Jf. Sætning 24 er $\mu = \log_a$ for et $a > 0$. □

Notation 26. Det $a > 0$, $a \neq 1$, som opfylder Sætning 25, betegnes e, og vi definerer $\ln(x) := \log_e(x)$ og $\exp(x) := e^x$. Specielt gælder, at

$$\exp'(x) = \log_e(e) e^x = \exp(x).$$

Sidst finder vi nogle velkendte differentialkvotienter.

Sætning 27. *Lad f være en reel, kontinuert og strengt monoton funktion defineret på et interval $I \subseteq R$. Hvis f er differentiabel i et punkt $x \in I$ med $f'(x) \neq 0$, er f^{-1} differentiabel med $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, hvor $y \in f(I)$.*

Bevis. Nemt at finde andetsteds. □

Lemma 28. $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \ln(x)$ *er uendeligt ofte differentiabel med differentialkvotient* $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Bevis. Da exp er strengt monoton og differentiabel overalt på $\mathbb{R}$, er ln differentiabel overalt i $\mathbb{R}_+$ jf. foregående sætning med

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Da $x \mapsto \frac{1}{x}$ er uendeligt ofte differentiabel, følger det ønskede. □

Sætning 29. *For $a > 0$, $a \neq 1$, er $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \log_a(x)$, uendeligt ofte differentiabel med differentialkvotient $x \mapsto \frac{1}{x\ln(a)}$.*

Bevis. Foregående lemma og $\ln(x) = \log_e(a) \log_a(x) = \ln(a) \log_a(x)$. □

Sætning 30. *For $a \in \mathbb{R}$, er $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^a$, uendeligt ofte differentiabel med differentialkvotient $x \mapsto ax^{a-1}$.*

Bevis. $(x^a)' = (\exp(a\ln(x))' = \frac{a}{x} \exp(a \ln(x)) = ax^{a-1}$. □

Litteratur

[1] Martin Pergler, *Exponentials and Logarithms by Continuous Extension.* Department of Mathematics, University of Chicago, `http://web.ncf.ca/fs039/mp/documents/ple2.pdf`.