Funktionsundersøgelse

Rasmus Sylvester Bryder

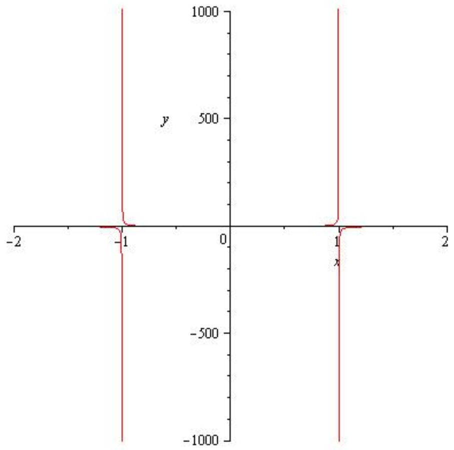
7. november 2008

Dette projekt afleveres i forbindelse med $\LaTeX\,2_\varepsilon$-kurset vejledningsuge 2, 2008-09 på KU; til projektet benyttes noter givet til opgaveløsning. Projektet beskæftiger sig med undersøgelse af funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x)/\ln(|x|), & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\} \\ 0, & \text{for } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1 Plot af f

Vi vil plotte f på intervallet $[-2, 2]$, og dette gøres i Maple med kommandoen `plot(f(x), x=-2..2)`, idet vi forinden har defineret f i Maple som værende øverste del af gaffelfunktionen i (??), samt sat `f(0):=0`. Plottet ses på figur 1.



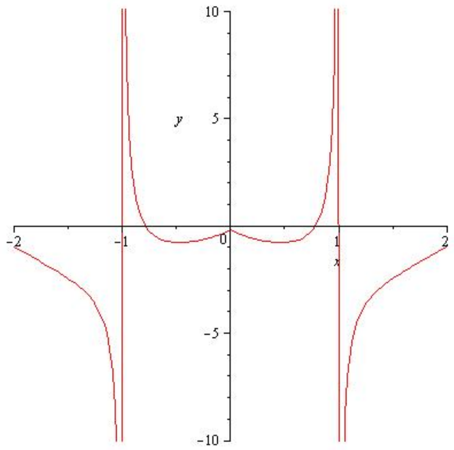
Figur 1: Plottet af f

Det er ikke videre aflæseligt hvordan grafen opfører sig omkring x-aksen; derfor indsnævrer vi vores y-interval i `plot`-kommandoen til $[-10, 10]$ (hvilket gøres med tilføjelsen `y=-10..10`), hvilket ses på figur 2.

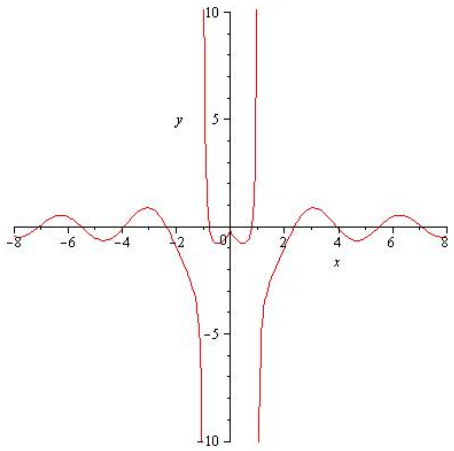
Vi bemærker først de lodrette linjer i $x = \pm 1$: f er heller ikke defineret i $x = \pm 1$, idet vi ikke må dividere med 0, men dette forklarer ikke de lodrette linjer. Det ser ud til at $f(x) \to -\infty$ for $|x| \to 1^+$ og $f(x) \to \infty$ for $|x| \to 1^-$, samt at $f(x) \to 0$ for $x \to \pm\infty$, således at f har to lodrette asymptoter i $x = \pm 1$ og én vandret asymptote i $y = 0$.

Med figur 3 (hvor vi har fjernet de lodrette linjer og udvidet x-intervallet) som yderligere støtte, ser det også ud til at f er symmetrisk omkring y-aksen, altså så $f(-x) = f(x)$. Sidste kan vises idet

$$f(-x) = \frac{\cos(2(-x))}{\ln(|-x|)} = \frac{\cos(-2x)}{\ln(|x|)} = \frac{\cos(2x)}{\ln(|x|)} = f(x),$$



Figur 2: Endnu et plot af f



Figur 3: Et sidste plot af f

så f er altså en *lige* funktion.

2 Kontinuitet af f

Kontinuitet defineres således:

Definition 2.1 (Kontinuitet)**.** *En funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *siges at være* kontinuert *i* $x_0 \in [a, b]$ *hvis*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Mere præcist kan ovenstående formuleres således:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, b[: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Vi vil vise, at f er kontinuert i 0; ifølge definition **??** skal grænseværdien af f for x gående imod 0 altså være lig $f(0) = 0$. Vi kan prøve at undersøge tælleren og nævneren separat for $x \to 0$, da begge består af kontinuerte funktioner (jf. Lindstrøm s. 214):

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \cos(2x) &= \cos(2 \cdot 0) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{x \to 0} \ln(|x|) &= -\infty \end{aligned}$$

Dermed vil vi når vi lader $x \to 0$ i $f(x)$ få numerisk mindre og mindre værdier, idet nævneren bliver numerisk større og tælleren vil gå imod en konstant, således at $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Dermed er f ifølge definition **??** kontinuert i 0.

Skal vi vise, at f er kontinuert for alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, kan vi gøre dette med en tilsvarende metode. Idet vi har, at cos og ln er kontinuerte funktioner, samt at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \cos(2x) &= \cos(2x_0) \\ \lim_{x \to x_0} \ln(|x|) &= \ln(|x_0|) \end{aligned}$$

har vi altså at grænseværdier for disse to udtryk eksisterer for alle $x_0 \neq 0$.

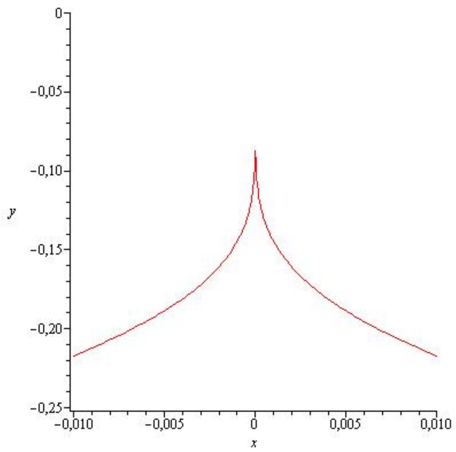
Ifølge Lindstrøm 5.4.3 har vi nu, at

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\cos(2x)}{\ln(|x|)} = \frac{\lim_{x\to x_0}\cos(2x)}{\lim_{x\to x_0}\ln(|x|)} = \frac{\cos(2x_0)}{\ln(|x_0|)}$$

for alle $x_0 \neq 0$, så man skulle tro, at f var kontinuert for alle $x_0 \neq 0$, i og med definitionskriteriet på kontinuitet er opfyldt her. **MEN!** Dette gælder kun forudsat, at $\ln(|x_0|) \neq 0$. Altså må gælde, at $x_0 \notin \{0, \pm 1\}$ for at ovenstående udtryk eksisterer, og derfor er f (i hvert fald) kontinuert for alle $x \notin \{0, \pm 1\}$. Har vi dog ydermere at $x = 0$, fandt vi før, at f faktisk også *var* kontinuert i 0 (idet vi satte $f(0) = 0$ i (**??**), da $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$), så f er altså kontinuert i hele sin definitionsmængde, og er dermed en kontinuert funktion.

3 Plot af f omkring $x = 0$

For at vise grafisk, at f er kontinuert i 0, kan vi bede Maple om at lave et plot af f på et lille interval omkring 0; her kunne man vælge $[-0.01, 0.01]$ og med kommandoen `plot(f(x),x=-0.01..0.01,y=-0.25..0,axes=frame)` får vi følgende:



Figur 4: Plot af f omkring $x = 0$

Problemet er her, at vi jo ved at f *er* kontinuert i 0 og at $f(0) = 0$, men dette – især det sidste – er ikke synderligt tydeligt på plottet. Vi kan bede Maple om at gøre plottet mere detaljeret ved at lade `plot` bestemme funktionsværdier omkring $x = 0$ med kommandoen `seq` og dernæst optegne de fremkomne punkter og tegne en linje imellem dem. Ved at erstatte med `[seq([t/50000,f(t/50000)],t=-500..500)]` i `plot` får vi følgende:
Her ses ret tydeligt, at $f(0) = 0$, og at alle punkter omkring 0 "arbejder sig op imod" $f(0)$ des tættere de er på 0, hvilket altså klart illustrerer kontinuiteten i 0.

4 Differentiabilitet af f

Differentiabilitet defineres således:

Definition 4.1 (Differentiabilitet)**.** *En funktion* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *er* differentiabel *i* $x_0 \in]a,b[$ *hvis der eksisterer ét* $c \in \mathbb{R}$*, så*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c$$

Tallet c *kaldes* differentialkvotienten af f i x_0 *og skrives* $c = f'(x_0)$.

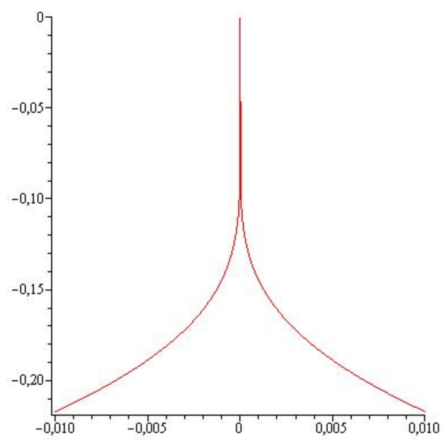
En grafisk fortolkning af differentiabilitet af f i x_0 er, at grafen for f ikke er "kantet" i x_0, altså at grafen ikke ændrer retning pludseligt i punktet; ud fra graferne ligner det at f *ikke* er differentiabel i 0, så lad os undersøge dette. Vi skal altså finde

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)}{\ln(|x|) \cdot x} \tag{2}$$

Her kan vi overveje, hvad der så sker når vi lader $x \to 0$: cos vil gå imod $\cos(0) = 1$, men nævneren er svær at tolke på, da ln jo vil gå imod $-\infty$, mens x vil gå imod 0. Vi introducerer derfor L'Hôpitals regel (om end det er lidt snyd, da vi bruger denne til at redegøre for differentiabilitet):

Sætning 4.2 (L'Hôpitals regel)**.** *Antag at* $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ *og at* $\lim_{x \to a} h(x) = \infty$ *for* $a \in \mathbb{R}$*. Antag videre, grænseværdien* $\lim_{x \to a} g'(x)/h'(x)$ *eksisterer (vi tillader at den kan være* ∞ *eller* $-\infty$*). Da eksisterer grænseværdien* $\lim_{x \to a} g(x)/h(x)$*, og der gælder, at*

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$



Figur 5: Bedre plot af f omkring $x = 0$

Idet vi kigger på nævneren i vores undersøgte udtryk, kan vi omskrive således:

$$\lim_{x\to 0} \ln(|x|) \cdot x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(|x|)}{x^{-1}} \tag{3}$$

Lad os nu kigge på $\ln(|x|)$: per definition har vi, at

$$\ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x), & \text{for } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{for } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Idet $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, har vi ifølge kernereglen (Lindstrøm 6.1.5), at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{for } x > 0 \\ -\frac{1}{(-x)} = \frac{1}{x}, & \text{for } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

så $\ln'(|x|) = \frac{1}{x}$. Da vi også ved, at $(1/x)' = -1/x^2$, kan vi nu prøve at undersøge om udtrykket i (**??**) har en grænseværdi når vi differentierer tæller og nævner:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(|x|))'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} -x = 0 \tag{6}$$

Da $\lim_{x\to 0}(\ln(|x|))'/(x^{-1})'$ eksisterer, eksisterer $\lim_{x\to 0} \ln(|x|) \cdot x$ også og er lig denne. Hvis vi nu blot vælger at gå imod 0 fra højre, får vi fra (**??**), at

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(|x|) \cdot x = \lim_{x\to 0^+} -x,$$

således at $\ln(|x|) \cdot x < 0$, når $x \in]0,1[$ (idet f ikke er defineret i ± 1). Tilsvarende får vi, at $\ln(|x|) \cdot x > 0$, når $x \in]-1,0[$. Idet $\cos(2x) \to 1$ for $x \to 0$, vil vi have, at udtrykket i (**??**) vil blive numerisk større og større, og alt i alt får vi, at

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)}{\ln(|x|) \cdot x} &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(2x)}{\ln(|x|) \cdot x} &= \infty \end{aligned}$$

Derfor er $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{\ln(|x|)\cdot x}$ faktisk udefineret i 0, og vi slutter at f ikke er differentiabel i 0.

For alle $x \notin \{0, \pm 1\}$ er f derimod differentiabel, og i Maple fås differentialkvotienten af denne ved at benytte kommandoen `D(f)`:

$$\mathtt{x} \to -\frac{\mathtt{2sin(2x)}}{\mathtt{ln(|x|)}} - \frac{\mathtt{cos(2x)abs(1,x)}}{\mathtt{ln(|x|)^2|x|}}$$

Betydningen af `abs(1,x)` kan slås op i Maples hjælpevindue:

The derivative of `abs` is denoted by `abs(1,x)`.

Altså er $\mathtt{abs}(1,\mathtt{x})$ givet ved fortegnet af x, og vi kan opskrive $f'(x)$ således, idet vi benytter (**??**):

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2\sin(2x)}{\ln(x)} - \frac{\cos(2x)}{x\ln(x)^2}, & \text{for } x \in]0,1[\cup]1,\infty[\\ -\frac{2\sin(2x)}{\ln(-x)} + \frac{\cos(2x)}{(-x)\ln(-x)^2}, & \text{for } x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\end{cases} \tag{7}$$

5 Middelværdi af f på $[-0.01, 0.01]$

Vi får i det følgende brug for nogle sætninger og definitioner – følgende sætning bevises ikke.

Sætning 5.1 (Middelværdisætningen)**.** *Antag at f er differentiabel på intervallet $]a,b[$ og kontinuert på intervallet $[a,b]$. Da findes $\xi \in]a,b[$ så*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Denne sætning er en central del af analyse, idet den fortæller os om monotoniforhold for f; hvis $f' > 0$ på et interval er f voksende på dette, etc.

Definition 5.2. *Middelværdien af en kontinuert funktion h over $[a,b]$ er defineret ved*

$$V(h) = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

Sætning 5.3 (Middelværdisætningen for integration)**.** *Lad h være en kontinuert funktion på intervallet $[a,b]$. Der findes da $\xi \in]a,b[$ så*

$$h(\xi) = V(h) = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

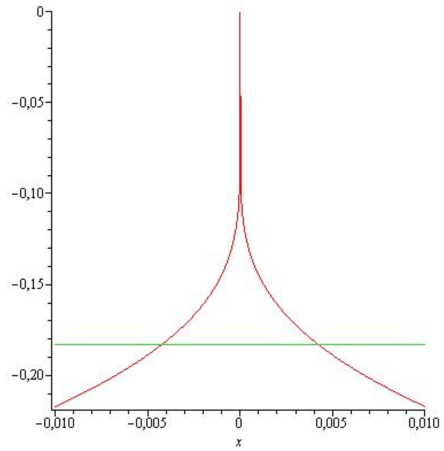
Bevis. Vi definerer H ved

$$H(x) = \int_a^x h(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in [a,b]$$

H er kontinuert på intervallet $[a,b]$ og differentiabel på intervallet $]a,b[$, hvor $H'(x) = h(x)$ (jf. analysens fundamentalsætning, Lindstrøm 8.3.3). Det gælder da ifølge sætning **??**, at der findes $\xi \in]a,b[$ så

$$\begin{aligned} h(\xi) = H'(\xi) &= \frac{H(b) - H(a)}{b-a} \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = V(h), \end{aligned}$$

hvilket var hvad vi skulle vise, idet vi ved næstsidste lighedstegn benyttede Lindstrøm 8.3.4. □



Figur 6: Plot af f og $V(f)$ på $[-0.01, 0.01]$

Skal vi finde middelværdien af f på intervallet fra opgave 3 – som var $[-0.01, 0.01]$ – har vi idet f er kontinuert på dette interval (jf. opgave 2):

$$V(f) = \frac{1}{0.01 - (-0.01)} \int_{-0.01}^{0.01} f(x)\mathrm{d}x$$

Maple giver med `1/(0.01-(-0.01))*int(f(x),x=-0.01..0.01)`, at $V(f) \approx -0.1830$.

Vi ønsker som det sidste at plotte både grafen for f og den middelværdi (som jo er en konstant) over det samme interval. Dette gøres med samme kommando som i opgave 3, blot med $V(f)$ tilføjet under hvilket der skal plottes, hvoraf vi får figur 6.

Idet vi ved at f er kontinuert på intervallet $[-0.01, 0.01]$, gælder sætning **??**, som siger, at der findes mindst ét $\xi \in]-0.01, 0.01[$, så $f(\xi) = V(f)$. På figuren ser vi faktisk, at der er to ξ, idet der er to skæringer mellem f og $V(f)$.

Litteratur

Tom Lindstrøm. *Kalkulus.* Universitetsforlaget, 2006.