MatM 2008-09
Ugeopgave 1

Rasmus Sylvester Bryder

25. november 2008

1 Opgave 2.3

Det er klart at vi må have følgende definitioner på plads:

Definition 37. *Et helt tal x kaldes* ***lige****, hvis der findes et helt tal $n \in \mathbb{Z}$, så $x = 2n$.*

Definition 38. *Et helt tal x kaldes* ***ulige****, hvis det ikke er lige.*

Følgende sætning skal vises:

$x \cdot y$ er ulige, hvis og kun hvis x er ulige og y er ulige.

Med konnektiver skrives ovenstående således:

$$(x \text{ ulige}) \wedge (y \text{ ulige}) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ ulige})$$

Bevis. Vi vil først vise implikationen til højre. Hvis både x og y er ulige, kan vi benytte Sætning 55 (med modifikationer):

Sætning 55. *Et helt tal x er ulige, hvis og kun hvis der findes et helt tal $n \in \mathbb{Z}$, så $x = 2n + 1$.*

Hvis altså både x og y er ulige, er det gældende, at x kan skrives på formen $x = 2m + 1$, hvor $m \in \mathbb{Z}$, og y kan skrives på formen $y = 2n + 1$, hvor $n \in \mathbb{Z}$. Produktet $x \cdot y$ er altså på formen

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (2m+1)(2n+1) = (2m)(2n) + 1 \cdot 2m + 1 \cdot 2n + 1 \cdot 1 \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

Idet vi sætter $p = 2mn + m + n$, kan $x \cdot y$ skrives på formen $x \cdot y = 2p + 1$, hvor $p \in \mathbb{Z}$ (hvilket må være klart, idet p er en sum af produkter af hele tal). Dermed gælder ifølge Sætning 55, at $x \cdot y$ er ulige, hvilket beviser den første implikation.

Implikationen til venstre vises ved kontraposition; vi skal altså vise, at

$$(x \text{ lige}) \vee (y \text{ lige}) \Rightarrow (x \cdot y \text{ lige})$$

Vi vil antage at x er lige og dermed er på formen $x = 2p$ ifølge Definition 37, hvor $p \in \mathbb{Z}$, og vise at $x \cdot y$ er lige. Antag nu at y er lige (at y er på formen $y = 2q$, hvor $q \in \mathbb{Z}$). Vi har, at

$$x \cdot y = (2p)(2q) = 4pq = 2(2pq) = 2r$$

hvor $r = 2pq$. Dermed er $x \cdot y$ lige ifølge Definition 37. Hvis vi nu antager at y er ulige i stedet og da er på formen $y = 2q + 1, q \in \mathbb{Z}$, har vi, at

$$x \cdot y = (2p)(2q + 1) = 4pq + 2p = 2(2pq + p) = 2s$$

hvor $s = 2pq+p$, hvormed $x \cdot y$ er lige ifølge Definition 37. Beviset er symmetrisk hvis y holdes lige, idet vi sætter $y = 2p$, samt enten $x = 2q$ eller $x = 2q + 1$, hvilket i begge tilfælde giver samme udtryk som ovenstående, idet multiplikation er kommutativ. Idet den kontraponerede nu er bevist, er biimplikationen vist og dermed sætningen. **QED.**

2 Bevis for Kalkulus sætning 4.3.3(ii)

Vi definerer først konvergens og divergens; ifølge Kalkulus:

Definisjon 4.3.1. *Følgen $\{a_n\}$ konvergerer mod et tal a dersom der for ethvert reelt tal $\varepsilon > 0$ (uanset hvor lille) findes et tal $N \in \mathbb{N}$ så $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. I så fald skriver vi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

En følge som konvergerer imod et tal kaldes konvergent, mens en følge som ikke konvergerer kaldes divergent.

Vi får i følgende bevis også brug for trekantsuligheden som vi ikke beviser:

Sætning 2.1.1 (Trekantsuligheden)**.** *For alle tal $a, b \in \mathbb{R}$ gælder, at*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Sætning 4.3.3(ii). *Lad $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to konvergente følger hvorom der gælder, at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Da er $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$.*

Bevis. Vi skal ved Definisjon 4.3.1 vise, at uanset hvilket $\varepsilon > 0$ vi har givet, vil der findes et $N \in \mathbb{N}$ så $|(a_n - b_n) - (A - B)| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Idet vi benytter trekantsuligheden (Kalkulus sætning 2.1.1), har vi, at

$$\begin{aligned}
|(a_n - b_n) - (A - B)| &= |a_n - b_n - A + B| \\
&= |a_n - A + B - b_n| \\
&= |(a_n - A) + (B - b_n)| \\
&\leq |a_n - A| + |B - b_n| \\
&= |a_n - A| + |-(b_n - B)| \\
&= |a_n - A| + |b_n - B|,
\end{aligned}$$

hvor vi sidst benyttede at $|-x| = |x|$.

Nu skal vi bare vise, at vi kan få både $|a_n - A|$ og $|b_n - B|$ mindre end $\varepsilon/2$ hvis vi bare vælger n stor nok.

Da vi lod $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, findes ifølge Definisjon 4.3.1 et tal $M_1 \in \mathbb{N}$, således at $|a_n - A| < \varepsilon/2$ for alle $n \geq M_1$, og tilsvarende lod vi $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, så der findes igen et tal $M_2 \in \mathbb{N}$, således at $|b_n - B| < \varepsilon/2$ for alle $n \geq M_2$.

Vi sætter nu $N = \max\{M_1, M_2\}$, og har da, at hvis $n \geq N$, er både $|a_n - A| < \varepsilon/2$ og $|b_n - B| < \varepsilon/2$. Det følger derpå naturligt for alle $n \geq N$, at

$$|(a_n - b_n) - (A - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Vi kan altså for ethvert reelt tal $\varepsilon > 0$ finde et $N \in \mathbb{N}$ så $|(a_n - b_n) - (A - B)| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$, og vi skriver $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$. **QED.**

Kalkulus giver hertil et specialtilfælde, som vi hurtigt viser:

Sætning. *Lad $\{b_n\}$ være en konvergent følge med $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Da er $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = -B$.*

Bevis. Vi vil benytte sætningen vi lige har bevist, og vi sætter $\{a_n\} = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$, altså så $a_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Det er nemt at se, at $\{a_n\}$ konvergerer imod 0, da vi har for alle $n \in \mathbb{N}$, at $|a_n - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ uanset hvilket $\varepsilon > 0$ vi har givet, idet vi benytter Definisjon 4.3.1. (Generelt konvergerer konstante følger imod deres egen konstant.)

Vi har nu to konvergente følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$, hvorom der gælder, at $\lim_{n\to\infty} a_n = A = 0$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, hvorpå Sætning 4.3.3(ii) giver, at

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(-b_n) = A - B = -B,$$

idet $a_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. **QED.**