MatM 2008-09
Ugeopgave 2

Rasmus Sylvester Bryder

2. december 2008

Alle definitioner og sætninger er fra undervisningsbogen Matematisk Metode (2008, Ian Kiming og Jesper Lützen).

1 Opgave 5.5.4

Vi skal gætte en formel for

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

og bevise vores formodning. Vi vil derfor prøve at se på værdier af a_n for forskellige værdier af n, så vi kan få en ide om værdierne for udtrykkene, og om der er en sammenhæng mellem disse. Vi har således at

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \\
a_2 &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \\
a_3 &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, \\
a_4 &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5},
\end{aligned}$$

hvor vi med paranteser bemærker at vi jo allerede har udregnet den pårørende sum i foregående udregning; det virker jo også klart, at a_{n+1} kan bestemmes ved summen af a_n og det nye "specielle" led i rækken. Ud fra vores udregninger vil vi gætte på at formlen for a_n da er

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

og vi skal derfor bevise følgende sætning:

Sætning. *For alle $n \in \mathbb{N}$ gælder*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Bevis. Vi vil bevise sætningen ved at benytte princippet om simpel induktion (Sætning 80), da formlen er et prædikat hvis frie variabel løber over alle naturlige tal $\mathbb{N}$. Vi ser derfor på **induktionsstarten** og se om sætningen gælder for $n = 1$, men det gør den, da

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}.$$

Nu foretager vi da **induktionsskridtet** og antager derfor, at sætningen rent faktisk gælder for et givet $m \in \mathbb{N}$. Derpå vil vi nu se om sætningen gælder for $n = m + 1$, og vi vil deraf undersøge udtrykket

$$a_{m+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

som jo er venstresiden af sætningen der ønskes vist, hvor vi har sat $n = m + 1$. Idet vi antog, at sætningen gjaldt for det givne $m \in \mathbb{N}$, har vi da, at

$$\begin{aligned}
a_{m+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m(m+2)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m+1}{m+2} \\
&= \frac{m+1}{(m+1)+1},
\end{aligned}$$

hvormed det ses, at sætningen rent faktisk gælder for $m + 1$ (vi benyttede en kvadratsætning ved tredjesidste lighedstegn). Ifølge princippet om simpel induktion følger dermed at prædikatet er sandt for alle $n \in \mathbb{N}$, og dermed er sætningen bevist. □

2 Opgave 6.9.5

Der skal vises, at de to udsagn

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[= [0, 1] \tag{1}$$

og

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[=]-1, 2[\tag{2}$$

er sande. Vi vil hertil benytte Sætning 105, som medfører, at for at bevise lighedstegnene ovenfor skal vi først vise at den ene sides mængde er indeholdt i den andens ($\subseteq$) og dernæst den anden vej rundt ($\supseteq$). Derpå kan vi ved Sætning 105 konkludere lighedstegnet.

Bevis for (1). $\subseteq$: Vi skal altså vise, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\subseteq [0,1]$. Det vil altså sige pr. Definition 100, at

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\Rightarrow x \in [0,1],$$

som mere formelt kan skrives omskrives pr. Definition 124, idet der tages fællesmængden af alle mængder i familien $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $B_n =]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$, som

$$\forall n \in \mathbb{N} : x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\Rightarrow x \in [0,1].$$

Idet vi kontraponerer ovenstående udsagn, skal vi altså vise

$$x \notin [0,1] \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \notin \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$$

Vi skal altså antage at $x \notin [0,1]$, hvilket betyder at $x < 0$ eller $x > 1$. Vi vil derfor behandle de to tilfælde hver for sig, og vise at under hver af disse to antagelser eksisterer $n \in \mathbb{N}$, så $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[1+\frac{1}{n}, \infty\right[$.

I tilfældet $x < 0$ skal vi vælge et $n_1 \in \mathbb{N}$, så $x \leq -\frac{1}{n_1}$. Men da vælger vi bare $n_1 \geq -\frac{1}{x}$ (da $x < 0$, så ulighedstegnet vendes), hvilket vi kan ifølge Arkimedes' princip (Kalkulus 2.2.6(i)). Da får vi nemlig, at $x \leq -\frac{1}{n_1}$, så $x \notin]-\frac{1}{n_1}, 1+\frac{1}{n_1}[$. Altså har vi vist, at der findes et $n_1 \in \mathbb{N}$ så $x \notin]-\frac{1}{n_1}, 1+\frac{1}{n_1}[$.

I tilfældet $x > 1$ skal vi vælge et $n_2 \in \mathbb{N}$, så $x \geq 1+\frac{1}{n_2}$. Men da vælger vi bare $x - 1 \geq \frac{1}{n_2}$, dvs. $\frac{1}{x-1} \leq n_2$, hvilket vi kan da $x > 1$ og ved Arkimedes' princip. Da får vi netop, at $x \geq 1+\frac{1}{n_2}$, så $x \notin]-\frac{1}{n_2}, 1+\frac{1}{n_2}[$, og dermed har vi vist, at der findes et $n_2 \in \mathbb{N}$ så $x \notin]-\frac{1}{n_2}, 1+\frac{1}{n_2}[$.

Idet vi nu vælger $n = \max\{n_1, n_2\}$, får vi at $x \notin [0,1] \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \notin \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$ er sandt, og dermed $\subseteq$.

$\supseteq$: Vi vil vise, at $[0,1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, hvilket vil sige pr. Definition 100 og 124, at

$$x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$$

Vi har at $-\frac{1}{n} < 0$ og $1+\frac{1}{n} > 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, vil vi for alle $n \in \mathbb{N}$ have at $[0,1] \subseteq \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$. Idet vi nu antager at vi har et givet $x \in [0,1]$, må dette x da opfylde højresiden af ovenstående implikation, hvormed $\supseteq$ er vist. Dermed gælder lighedstegnet, og vi har derfor vist, at

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[= [0,1]$$

QED.

Bevis for (2). $\subseteq$: Vi vil vise, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\subseteq]-1,2[$. Pr. Definition 100 og 128 er dette udsagn altså ækvivalent med

$$\exists n \in \mathbb{N} : x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\Rightarrow x \in]-1,2[$$

Vi antager altså at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$. For et givet $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $0 < \frac{1}{n} \geq 1$, så $-1 \leq -\frac{1}{n}$ og $1+\frac{1}{n} \geq 2$, hvormed vi har at $\left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\subseteq]-1,2[$ uanset hvilket n vi har givet (idet endepunkter ikke var medtaget for $\frac{1}{n}$ lig 1, er de heller ikke medtaget i det andet interval). Under vores antagelse vil der gælde, at $x \in]-1,2[$, hvormed implikationen er vist, og dermed $\subseteq$.

$\supseteq$: Vi vil vise, at $]-1,2[\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, ækvivalent med følgende pr. Definition 100 og 128:

$$x \in]-1,2[\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$$

Antag derfor at $x \in]-1,2[$. Vi skal så vise, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$. Men idet vi lader $n = 1$, får vi netop, at $\left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[=]-1, 1+1[=]-1,2[$, så for $n = 1$ har vi, at $x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$. Under vores antagelse at $x \in]-1,2[$ findes der altså et $n \in \mathbb{N}$, så $x \in \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, og dermed er $\supseteq$ vist, og dermed lighedstegnet. Vi har hermed vist, at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[=]-1,2[$$

QED.