MI 2009-10

12. oktober 2009

Alle henvisninger er til Measure theory, hvis ikke andet er angivet.

Opgave 1

Q1.1

Vi definerer funktionen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$\varphi(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}.$$

Vi skal vise, at φ er integrabel over $A = \mathbb{R} \times (-1,1)$ med hensyn til m_2, altså, at $\int |1_A\varphi| \mathrm{d}m_2 < \infty$. Det er klart, at $|1_A\varphi|$ er $\mathcal{M}^+$, da den er positiv og kontinuert, da φ er kontinuert på $A \in \mathbb{B}_2$, og dermed jf. opgave 4.11(b) målelig.

Vi husker fra eksempel 9.3, at $m_2 = m \otimes m$. Vi har endvidere for alle $x, y \in \mathbb{R}$, at $1_A(x,y) = 1_{(-1,1)}(y)$.

Da $|1_A\varphi| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ med Lebesguemålet m_2 og vi arbejder i målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ med hensyn til x og y, har vi nu jf. Tonelli (sætning 9.4) og sætning 9.5, at

$$\begin{aligned}
\int |1_A\varphi| \mathrm{d}m_2 &\overset{9.4}{=} \int \left(\int |1_A(x,y)\varphi(x,y)| \mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x) \\
&= \int 2 \left(\int 1_{(0,\infty)}(y) \left| 1_{(-1,1)}(y) \frac{y}{1+x^2y^2} \right| \mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x) \\
&\overset{6.19,\, 9.5}{=} \int \left(\int 2 \cdot 1_{(0,1)}(y) \left| \frac{y}{1+x^2y^2} \right| \mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}m(y) \\
&\overset{6.19}{=} \int_0^1 2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{1+x^2y^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

idet $1_{(0,1)}(y) \geq 0$ for $y \in \mathbb{R}$ og kan ses som en konstant i det indre integral (her benytter vi også sædvanlig notation for Lebesgue-integraler), og $1 + x^2y^2 > 0$ for $x, y \in \mathbb{R}$.

Vi brugte ved andet lighedstegn for fast x, at $y \mapsto |1_A(x,y)\varphi(x,y)|$ er lige (idet $|-y| = |y|$ og $(-y)^2 = y^2$ for alle $y \in \mathbb{R}$) med opgave 10.12(a), idet $|1_A(x,y)\varphi(x,y)| < \infty$ for alle $y \in \mathbb{R}$, hvorpå $|1_A\varphi| \in \mathcal{M}$ for fast x, da $|1_A\varphi|$ er ikke-negativ og kontinuert på $(-1,1)$, og dermed målelig jf. opgave 4.11(b).

Lad nu $y \in (0,1)$ være fast. Vi definerer $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $h(x) = xy$, samt $I = J = \mathbb{R}$, som begge er åbne. h er kontinuert og dermed $\mathbb{B}$-målelig jf. lemma 4.8. Da h har invers funktion $h^{-1}(z) = z/y$, ses at h er en bijektion mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$ (og specielt I og J), så $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Det er også klart, at h og h^{-1} er kontinuert differentiable på hhv. I og J.

Da funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $\phi(x) = 1/(1+x^2)$ er positiv og kontinuert og dermed målelig, er denne $\mathcal{M}^+$, og vi får nu ved sætning 12.7, at

$$\int |1_A \varphi| \mathrm{d}m_2 = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{1+x^2y^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+w^2} \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}y.$$

Da $\phi(w) < \infty$ for alle $w \in \mathbb{R}$, er $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Da ϕ er kontinuert på $\mathbb{R}$ og funktionen $w \mapsto \arctan(w)$ på $\mathbb{R}$ er differentiabel med differentialkvotient ϕ, får vi jf. sætning 6.12 (med $\phi_n(w) = 1_{(-n,n)}(w)\phi(w)$) og korollar 7.19, at

$$\begin{aligned}
\int |1_A \varphi| \mathrm{d}m_2 &= \int_0^1 2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+w^2} \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}y \overset{6.12}{=} \int_0^1 2 \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-n}^{n} \frac{1}{1+w^2} \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{7.19}{=} \int_0^1 2 \lim_{n\to\infty} [\arctan(w)]_{-n}^{n} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2 \lim_{n\to\infty} (\arctan(n) - \arctan(-n)) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2\pi \mathrm{d}y = \int 2\pi 1_{(0,1)} \mathrm{d}m \overset{6.19}{=} 2\pi \cdot m((0,1)) \overset{2.14}{=} 2\pi < \infty,
\end{aligned}$$

da $2\pi \in [0, \infty]$ og $1_{(0,1)} \in \mathcal{M}^+$. Dermed er $\int |1_A \varphi| \mathrm{d}m_2 < \infty$, og φ er integrabel over A med hensyn til m_2.[1]

Vi skal desuden beregne $\int_A \varphi \mathrm{d}m_2$. Vi har vist, at $1_A \varphi$ er integrabel med hensyn til m_2. Med Fubini (sætning 9.10, og egentlig (9.13)), får vi derpå, at

$$\begin{aligned}
\int 1_A \varphi \mathrm{d}m_2 &\overset{9.10}{=} \int \left(\int 1_A(x,y)\varphi(x,y) \mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x) \\
&\overset{9.10}{=} \int \left(\int 1_{(-1,1)}(y) \frac{y}{1+x^2y^2} \mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x) \\
&= \int 0 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dette lighedstegn indses, idet vi lader $x \in \mathbb{R}$ være fast. Funktionen $y \mapsto 1_{(-1,1)}(y) \frac{y}{1+x^2y^2}$ er $\mathcal{M}$, da den kun antager endelige værdier for $y \in \mathbb{R}$ og er målelig jf. opgave 4.11(b) grundet kontinuiteten på $(-1,1)$. Den er endvidere integrabel jf. sætning 6.11, sætning 6.19 og lemma 7.2, da

$$\int \left| 1_{(-1,1)}(y) \frac{y}{1+x^2y^2} \right| \mathrm{d}y = \int 1_{(-1,1)}(y) \frac{|y|}{1+x^2y^2} \mathrm{d}y \le \int 1_{(-1,1)} \mathrm{d}m < \infty,$$

idet $1_{(-1,1)}(y) \frac{|y|}{1+x^2y^2} \le 1_{(-1,1)}(y)|y| \le 1_{(-1,1)}(y)$, da $1 + x^2y^2 \ge 1$ for $y \in \mathbb{R}$. Endelig er funktionen ulige, idet $1_{(-1,1)}(-y) \frac{-y}{1+x^2(-y)^2} = -1_{(-1,1)}(y) \frac{y}{1+x^2y^2}$ for alle $y \in \mathbb{R}$, hvorpå vi kan benytte opgave 10.12(c) og få det ovenstående.

Altså er $\int_A \varphi \mathrm{d}m_2 = \int 0 \mathrm{d}x = 0$.

Opgave 2

Lad μ være målet på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ med tæthed

$$f(x_1, x_2) = 1_{[1,\infty)\times[1,\infty)}(x_1, x_2) c e^{-x_1 x_2} = 1_{[1,\infty)}(x_1) 1_{[1,\infty)}(x_2) c e^{-x_1 x_2}$$

[1] Jeg ved, at jeg kunne have brugt opgave 6.1.

med hensyn til m_2, hvor $c \in (0, \infty)$ er vilkårlig. Med andre ord lades $\mu = f \cdot m_2$. Vi ser klart, at $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, da denne er et produkt af ikke-negative funktioner og dermed selv ikke-negativ, og da $(x_1, x_2) \mapsto ce^{-x_1 x_2}$ er kontinuert på $[1, \infty) \times [1, \infty) \in \mathbb{B}_2$, hvorpå f er målelig jf. opgave 4.11(b).

Q2.1

Vi skal vise for $A \in \mathbb{B}$, at

$$\mu(A \times \mathbb{R}) = \int_{A \cap [1,\infty)} \frac{c}{x_1} e^{-x_1} \mathrm{d}x_1,$$

og at $\mu(\mathbb{R}^2) < \infty$. Lad $A \in \mathbb{B}$. Pr. definition (i lemma 11.1) har vi, at

$$\begin{aligned}
\mu(A \times \mathbb{R}) &= \int_{A \times \mathbb{R}} 1_{[1,\infty)\times[1,\infty)}(x_1, x_2) c e^{-x_1 x_2} \mathrm{d}m_2(x_1, x_2) \\
&= \int 1_A(x_1) 1_{\mathbb{R}}(x_2) 1_{[1,\infty)}(x_1) 1_{[1,\infty)}(x_2) c e^{-x_1 x_2} \mathrm{d}m_2(x_1, x_2) \\
&= \int 1_{A\cap[1,\infty)}(x_1) 1_{[1,\infty)}(x_2) c e^{-x_1 x_2} \mathrm{d}m_2(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

jf. (A.12). Da vi har ganget indikatorfunktioner på f for at få denne integrand, er integranden en $\mathcal{M}^+$-funktion jf. lemma 5.9, da indikatorfunktioner er $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$. Da $m_2 = m \otimes m$ jf. eksempel 9.3, får vi jf. Tonelli, at

$$\begin{aligned}
\mu(A \times \mathbb{R}) &= \int \left(\int 1_{A\cap[1,\infty)}(x_1) 1_{[1,\infty)}(x_2) c e^{-x_1 x_2} \mathrm{d}m(x_2) \right) \mathrm{d}m(x_1) \\
&\overset{6.19}{=} \int_{A\cap[1,\infty)} \left(\int_1^\infty c e^{-x_1 x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1,
\end{aligned}$$

idet $1_{A\cap[1,\infty)}(x_1) \geq 0$ for $x_1 \in \mathbb{R}$ og kan ses som en konstant i det indre integral, og da vi benytter sædvanlig Lebesgue-integralnotation. Vi ser nu, at

$$\begin{aligned}
\mu(A \times \mathbb{R}) &\overset{6.12}{=} \int_{A\cap[1,\infty)} \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{c}{x_1} e^{-x_1 x_2} \right]_1^n \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{A\cap[1,\infty)} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{c}{x_1} e^{-x_1 n} + \frac{c}{x_1} e^{-x_1} \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{A\cap[1,\infty)} \frac{c}{x_1} e^{-x_1} \mathrm{d}x_1,
\end{aligned}$$

som ønsket. Vi skal desuden vurdere $\mu(\mathbb{R}^2) < \infty$. Sæt derfor $A = \mathbb{R}$. Da er $\mu(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}\cap[1,\infty)} \frac{c}{x_1} e^{-x_1} \mathrm{d}x_1 = \int 1_{[1,\infty)}(x_1) \frac{c}{x_1} e^{-x_1} \mathrm{d}x_1$.

Betragt funktionen $x_1 \mapsto 1_{[1,\infty)}(x_1) \frac{c}{x_1} e^{-x_1}$ på $\mathbb{R}$. Denne er klart $\mathcal{M}^+$, da den er ikke-negativ for alle $x_1 \in \mathbb{R}$ og målelig jf. opgave 4.11(b) grundet kontinuitet på $[1, \infty) \in \mathbb{B}$. Vi har endvidere for alle $x_1 \in [1, \infty)$, at $\frac{c}{x_1} e^{-x_1} \leq ce^{-x_1}$, så $1_{[1,\infty)}(x_1) \frac{c}{x_1} e^{-x_1} \leq 1_{[1,\infty)}(x_1) ce^{-x_1}$ for alle $x_1 \in \mathbb{R}$.

Den større funktion er også klart $\mathcal{M}^+$ af samme grunde som før. og er $\mathcal{M}$, da den kun antager endelige værdier for alle $x_1 \in \mathbb{R}$. Funktionen $x_1 \mapsto ce^{-x_1}$

er kontinuert og er differentialkvotient til funktionen $x_1 \mapsto -ce^{-x_1}$; da følger af sætning 6.11 og 6.12 samt korollar 7.19, at

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}^2) \overset{6.11}{\leq} \int 1_{[1,\infty)}(x_1)ce^{-x_1}\mathrm{d}x_1 &= \int_1^\infty ce^{-x_1}\mathrm{d}x_1 \overset{6.12}{=} \lim_{n\to\infty}\int_1^n ce^{-x_1}\mathrm{d}x_1 \\ &\overset{7.19}{=} \lim_{n\to\infty}\left[-ce^{-x_1}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty}\left(ce^{-1}-ce^{-n}\right) \\ &= ce^{-1} < \infty,\end{aligned}$$

da $c \in (0,\infty)$. Dermed er det ønskede vist. Heraf ses også, at f er integrabel med hensyn til m_2 jf. lemma 7.2, idet $\int |f|\mathrm{d}m_2 = \int f\mathrm{d}m_2 \leq ce^{-1} < \infty$.

Det er antaget fra nu af, at $c \in (0,\infty)$ er valgt således at μ bliver et sandsynlighedsmål, hvilket er muligt, idet vi har vist, at $\mu(\mathbb{R}^2) < \infty$; her er $c \simeq 4.56$. Lad X_1 og X_2 angive to stokastiske variable defineret på $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ med værdier i $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ og simultan fordeling μ; lad endvidere $X = (X_1, X_2)$, så X har værdier i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ og fordeling μ; det vil sige, at $X(P) = \mu = f\cdot m_2$.

Q2.2

Vi skal vise, at fordelingen af X_1 har tæthed $g(z) = 1_{[1,\infty)}(z)\frac{c}{z}e^{-z}$ med hensyn til m.

Det er oplagt at benytte korollar 18.2. Vi har, at målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ er σ-endeligt (eksempel 2.25), og at X_1 og X_2 er stokastiske variable defineret på det fælles baggrundsrum $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ (ved X) med værdier i $\mathbb{R}$. Da $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, og da den simultane fordeling af X_1 og X_2 er på formen $f\cdot m_2 = f\cdot m\otimes m$ (jf. eksempel 9.3), er fordelingen af X_1 på formen $g\cdot m$, hvor vi har for $z\in\mathbb{R}$, at

$$\begin{aligned}g(z) &= \int f(z,x_2)\mathrm{d}m(x_2) \\ &= \int 1_{[1,\infty)}(z)1_{[1,\infty)}(x_2)ce^{-zx_2}\mathrm{d}m(x_2) \\ &\overset{6.19}{=} 1_{[1,\infty)}(z)c\int_1^\infty e^{-zx_2}\mathrm{d}x_2,\end{aligned}$$

idet $1_{[1,\infty)}(z)c \geq 0$ er en konstant i det indre integral, og $x_2 \mapsto 1_{[1,\infty)}(x_2)e^{-zx_2}$ er $\mathcal{M}^+$.

Lader vi $z\in\mathbb{R}$ være fast, ses, at $x_2 \mapsto e^{-zx_2}$ er kontinuert og endelig, er den $\mathcal{M}$ jf. opgave 4.11(b) og def. 5.1. Idet $x_2 \mapsto -\frac{1}{z}e^{-zx_2}$ er differentiabel med differentialkvotient $x_2\mapsto e^{-zx_2}$, bruger vi derpå korollar 7.19 og sætning 6.12 (med funktionsfølgen $f_n(x_2) = 1_{[1,n]}(x_2)e^{-zx_2}$), og får da, at

$$\begin{aligned}g(z) &\overset{6.12}{=} 1_{[1,\infty)}(z)c\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-zx_2}\mathrm{d}x_2 \overset{7.19}{=} 1_{[1,\infty)}(z)c\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{z}e^{-zx_2}\right]_1^n \\ &= 1_{[1,\infty)}(z)c\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{z}e^{-z}-\frac{1}{z}e^{-zn}\right) = 1_{[1,\infty)}(z)\frac{c}{z}e^{-z}.\end{aligned}$$

Altså har fordelingen af X_1 tæthed $g(z) = 1_{[1,\infty)}(z)\frac{c}{z}e^{-z}$ med hensyn til m.

Vi skal argumentere for, at X_2 har samme fordeling som X_1. Da ordene fordeling og sandsynlighedsmål er ombyttelige (s. 307), skal vi finde, at sandsynlighedsmålet for X_2 er det samme som X_1's, nemlig $X_1(P) = g \cdot m$. Jf. s. 231 skal vi finde, at hvis $X_2(P) = \phi \cdot \nu$, og $\nu = m$ samt $\phi = g$ m-næsten overalt, da er sandsynlighedsmålene og dermed fordelingerne ens.

Da hovedbetingelserne for korollar 18.2 er opfyldt, og vi benytter bemærkningen efter lemma 12.2, får vi idet den simultane fordeling af X_1 og X_2 er $X(P) = f \cdot m_2 = f \cdot m \otimes m$, hvor $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, er fordelingen af X_2 på formen $h \cdot m$, hvor for $z \in \mathbb{R}$ vi har, at

$$\begin{aligned} h(z) &= \int f(x_1, z)\mathrm{d}m(x_1) = \int 1_{[1,\infty)}(x_1)1_{[1,\infty)}(z)ce^{-x_1 z}\mathrm{d}m(x_1) \\ &= \int 1_{[1,\infty)}(z)1_{[1,\infty)}(x_2)ce^{-zx_2}\mathrm{d}m(x_2) = g(z), \end{aligned}$$

idet vi rokerer en smule på rækkefølgen af variablene og omdøber x_1 til x_2. Da $h = g$, er $X_1(P) = g \cdot m = h \cdot m = X_2(P)$ og vi slutter, at X_2 har samme fordeling som X_1.

Q2.3

Vi skal argumentere for, at X_1 har endeligt andet moment (altså at fordelingen har endeligt andet moment). Vi skal derfor, da $X_1(P) = g \cdot m$, pr. eksempel 16.8 og definition 16.7 vise, at $E|X_1|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^2 g(x_1)\mathrm{d}x_1 = \int x_1^2 g(x_1)\mathrm{d}x_1 < \infty$. Vi regner derfor på $E|X_1|^2$:

$$E|X_1|^2 = \int x_1^2 g(x_1)\mathrm{d}x_1 = \int x_1^2 1_{[1,\infty)}(x_1)\frac{c}{x_1}e^{-x_1}\mathrm{d}x_1 = \lim_{n\to\infty}\int_1^n cx_1e^{-x_1}\mathrm{d}x_1,$$

jf. sætning 6.12, da $x_1 \mapsto 1_{[1,n]}(x_1)cx_1e^{-x_1}$ er $\mathcal{M}^+$ for $n \in \mathbb{N}$. Med partiel integration (se eksempel 7.22), får vi, da $x_1 \mapsto ce^{-x_1}$ er kontinuert og endelig og dermed en $\mathcal{M}$-funktion (til brug af korollar 7.19), da $x \mapsto -ce^{-x_1}$ er en stamfunktion til denne, og da $x_1 \mapsto x_1$ er kontinuert differentiabel, at

$$\begin{aligned} E|X_1|^2 &\overset{7.24}{=} \lim_{n\to\infty}\left([-cx_1e^{-x_1}]_1^n - \int_1^n -ce^{-x_1}\mathrm{d}x_1\right) \\ &\overset{7.3}{=} \lim_{n\to\infty}\left(ce^{-1} - cne^{-n} + \int_1^n ce^{-x_1}\mathrm{d}x_1\right) \\ &\overset{7.19}{=} \lim_{n\to\infty}\left(ce^{-1} - cne^{-n} + [-ce^{-x_1}]_1^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(ce^{-1} - cne^{-n} + ce^{-1} - ce^{-n}\right) = 2ce^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Da har X_1 endeligt andet og første moment (jf. lemma 16.13, hvor betingelserne klart er opfyldt). Endvidere er $EX_1^2 = \int x_1^2 g(x_1)\mathrm{d}x_1 = E|X_1|^2 = 2ce^{-1}$, og

$$EX_1 \overset{16.7}{=} \int x_1 g(x_1)\mathrm{d}x_1 = \int_1^\infty ce^{-x_1}\mathrm{d}x_1 = \lim_{n\to\infty}\left(ce^{-1} - ce^{-n}\right) = ce^{-1},$$

jf. ovenstående udregninger.

Q2.4

Vi skal nu vise, at X_1X_2 har endeligt første moment.

Idet $X = (X_1, X_2)$ var en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ med værdier i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ med mål m_2 og da fordelingen af X er $X(P) = \mu = f \cdot m_2$, lader vi nu $t : (\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2) \mapsto (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ være givet ved $t(x, y) = xy$. t er klart kontinuert og dermed målelig (lemma 4.8). Vi betragter nu den reelle stokastiske variabel $t(X) = t(X_1, X_2) = X_1X_2$ (målelig grundet lemma 5.3). Vi skal nu vise, at $E|X_1X_2| < \infty$, og bruger derfor eksempel 16.6, så

$$
\begin{aligned}
E|X_1X_2| = \int |X_1X_2| \mathrm{d}P &= \int |x_1x_2| f(x_1, x_2) \mathrm{d}m_2(x_1, x_2) \\
&= \int 1_{[1,\infty)}(x_1) 1_{[1,\infty)}(x_2) x_1x_2 c e^{-x_1x_2} \mathrm{d}m_2(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

da $|x_1x_2| = x_1x_2$ for $x_1, x_2 \geq 1$. Integranden er klart ikke-negativ og målelig jf. opgave 4.11(b) grundet kontinuitet på $[1, \infty) \times [1, \infty) \in \mathbb{B}_2$, så den er altså indeholdt i $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ med mål m_2. Da $m_2 = m \otimes m$, får vi med Tonelli (sætning 9.4), at

$$
\begin{aligned}
E|X_1X_2| &= \int \left(\int 1_{[1,\infty)}(x_1) 1_{[1,\infty)}(x_2) x_1x_2 c e^{-x_1x_2} \mathrm{d}m(x_2) \right) \mathrm{d}m(x_1) \\
&\overset{6.19}{=} \int_1^\infty c x_1 \left(\int_1^\infty x_2 e^{-x_1x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1,
\end{aligned}
$$

idet vi betragter $1_{[1,\infty)}(x_1) c x_1 \geq 0$ som en konstant i det indre integral. Vi har nu, idet $x_2 \mapsto 1_{[1,n]}(x_2) x_2 e^{-x_1x_2}$ er $\mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$
\begin{aligned}
& E|X_1X_2| \\
\overset{6.12}{=}\ & \int_1^\infty c x_1 \lim_{n\to\infty} \left(\int_1^n x_2 e^{-x_1x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
\overset{7.24}{=}\ & \int_1^\infty c x_1 \lim_{n\to\infty} \left(\left[-\frac{1}{x_1} x_2 e^{-x_1x_2} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x_1} e^{-x_1x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
\overset{7.3}{=}\ & \int_1^\infty c x_1 \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_1} e^{-x_1} - \frac{1}{x_1} n e^{-nx_1} \right) + \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x_1} e^{-x_1x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
\overset{6.12}{=}\ & \int 1_{[1,\infty)}(x_1) c x_1 \left(\frac{1}{x_1} e^{-x_1} + \int_1^\infty \frac{1}{x_1} e^{-x_1x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
\overset{6.19}{=}\ & \int \left(1_{[1,\infty)}(x_1) c e^{-x_1} + \int_1^\infty 1_{[1,\infty)}(x_1) c e^{-x_1x_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
\overset{6.19}{=}\ & \int_1^\infty c e^{-x_1} \mathrm{d}x_1 + \int_1^\infty \int_1^\infty c e^{-x_1x_2} \mathrm{d}m(x_2) \mathrm{d}m(x_1) \\
\overset{9.4}{=}\ & c e^{-1} + \int f \mathrm{d}m_2 = c e^{-1} + 1 < \infty.
\end{aligned}
$$

I ovenstående benyttedes en del sætninger og tidligere resultater. Sidste lighedstegn indses ved tidligere brug af Tonelli baglæns og udregningerne fra EX_1 og faktum, at vi har valgt c så μ blev et sandsynlighedsmål, dvs. så $\mu(\mathbb{R}^2) = \int f \mathrm{d}m_2 = 1$.

Ved henvisningerne til 6.19 brugtes der, at integranderne var $\mathcal{M}^+$ og at $1_{[1,\infty)}(x_1) c x_1 \geq 0$; endvidere blev ved næstsidste lighedstegn brugt sætning 8.7, da $x_1 \mapsto 1_{[1,\infty)}(x_1)ce^{-x_1x_2}$ er $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ grundet ikke-negativitet og kontinuitet på $[1,\infty)$ med opgave 4.11(b).

Ved henvisningen til 7.3 blev benyttet at $x_2 \mapsto 1_{[1,n]}(x_1)1_{[1,n]}(x_2)\frac{1}{x_1}e^{-x_1x_2}$ er integrabel, da vi har for $n \in \mathbb{N}$, at

$$\int_1^n \left| 1_{[1,n]}(x_1)\frac{1}{x_1}e^{-x_1x_2} \right| \mathrm{d}x_2 \le \int_1^n e^{-x_1x_2}\mathrm{d}x_2 \le \int_1^n 1\mathrm{d}x_2 = n-1 < \infty$$

med brug af sætning 6.11. Endelig blev benyttet partiel integration jf. eksempel 7.24.

Vi har dermed fundet, at X_1X_2 har endeligt første moment, og tilmed jf. eksempel 16.6, at

$$E(X_1X_2) = \int 1_{[1,\infty)}(x_1)1_{[1,\infty)}(x_2)x_1x_2ce^{-x_1x_2}\mathrm{d}m_2(x_1,x_2) = E|X_1X_2|,$$

hvorpå vi finder, at $E(X_1X_2) = ce^{-1} + 1$.

Q2.5

Først nævnes, at siden X_2 i Q2.2 har samme fordeling som X_1, er $EX_2 = ce^{-1}$ og $EX_2^2 = 2ce^{-1}$. Vi skal nu vise, at $X_1 + X_2$ har endeligt andet moment; men da $E|X_2|^2 = \int |x|^2 h(x)\mathrm{d}x = \int x^2 h(x)\mathrm{d}x = EX_2^2 = 2ce^{-1} < \infty$, da vi i Q2.2 kaldte tætheden for $X_2(P)$ h, og vi fandt i Q2.3, at $E|X_1|^2 < \infty$, følger klart af lemma 16.12, at $E|X_1+X_2|^2 < \infty$, hvilket var det ønskede.

Vi skal endvidere finde $V(X_1+X_2)$. Ved lemma 16.16 og lemma 16.3 følger nu, idet $E|X_1+X_2|^2 < \infty$ og $E|X_2| = E|X_1| < \infty$, at

$$\begin{aligned}
V(X_1+X_2) &= E(X_1+X_2)^2 - (E(X_1+X_2))^2 \\
&= E(X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2) - (E(X_1)+E(X_2))^2 \\
&= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2E(X_1X_2) \\
&\qquad -E(X_1)^2 - E(X_2)^2 - 2E(X_1)E(X_2) \\
&= 2ce^{-1} + 2ce^{-1} + 2(ce^{-1}+1) - c^2e^{-2} - c^2e^{-2} - 2c^2e^{-2} \\
&= 6ce^{-1} - 4c^2e^{-2} + 2,
\end{aligned}$$

jf. tidligere resultater.

Vi vil nu undersøge om X_1 og X_2 er uafhængige. Vi finder derfor $V(X_1) + V(X_2) = 2V(X_1)$, da X_1 og X_2 har samme fordeling. Vi får med lemma 16.16, da $EX_1^2 < \infty$, at

$$\begin{aligned}
V(X_1)+V(X_2) &= 2(EX_1^2 - (EX_1)^2) &&= 2(2ce^{-1} - c^2e^{-2}) \\
&= 2(2ce^{-1} - c^2e^{-2}) &&= 4ce^{-1} - 2c^2e^{-2}.
\end{aligned}$$

Antag $V(X_1+X_2) = V(X_1)+V(X_2)$. Da må gælde, at differensen er lig 0, altså at $2c^2e^{-2} - 2ce^{-1} - 2 = 0$. Løser vi denne andengradsligning med hensyn til c, fås at

$$c = \frac{2e^{-1} \pm \sqrt{4e^{-2} + 16e^{-2}}}{4e^{-2}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2e^{-1}} \simeq \begin{cases} 4.40 \\ -1.68 \end{cases},$$

hvilket strider imod, at $c \simeq 4.56$, idet vi valgte $c \in (0,\infty)$, så μ kunne være et sandsynlighedsmål. Altså må $V(X_1+X_2) \neq V(X_1)+V(X_2)$, og da både X_1 og X_2 har endelige andenmomenter, kan X_1 og X_2 ikke være uafhængige jf. lemma 19.13.

Opgave 3

Vi betragter de to transformationer $t : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ og $r : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ givet ved $t(x) = \log \|x\|$ og $r(x) = \|x\|$, hvor $\|x\|$ betegner den sædvanlige euklidiske norm på $\mathbb{R}^k$ givet ved
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}.$$
Lader vi endvidere $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $s(t) = e^t$, ser vi, at $s \circ t(x) = e^{\log \|x\|} = \|x\| = r(x)$. Definerer vi $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ ved $f(x) = \frac{1}{\|x\|^k}$, introducerer vi nu målet $\mu = f \cdot m_k$. Det oplyses, at t og s er målelige og at $f \in \mathcal{M}^+$. Ligeledes ses jf. lemma 4.8, at r er målelig.

For $w \in \mathbb{R}$ definerer vi translationen $\tau_w : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ givet ved $\tau_w(t) = t + w$ og ligeledes $k \times k$-matricen A_w givet ved
$$A_w = \begin{pmatrix} e^w & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^w & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^w \end{pmatrix},$$
som vi betragter som en lineær afbildning $A_w : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Det bemærkes da, at A_w klart er invertibel, da $\det A_w \neq 0$, og den inverse matrix A_w^{-1} ser just ud som A_w, blot med e^{-w} i stedet for e^w i diagonalen.

Q3.1

Vi skal vise, at $\tau_w \circ t = t \circ A_w$. Lader vi $w \in \mathbb{R}$ og $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ være givet, får vi, at $\tau_w \circ t(x) = \tau_w(\log \|x\|) = \log \|x\| + w$. På den anden side får vi, at
$$\begin{aligned} t \circ A_w(x) &= t\left(\begin{pmatrix} e^w & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right) = t\begin{pmatrix} e^w x_1 \\ \vdots \\ e^w x_k \end{pmatrix} \\ &= \log \sqrt{(e^w x_1)^2 + \cdots + (e^w x_k)^2} = \log \sqrt{(e^w)^2(x_1^2 + \cdots + x_k^2)} \\ &= \log(|e^w| \|x\|) = \log \|x\| + \log(e^w) = \log \|x\| + w, \end{aligned}$$
da $|e^w| = e^w \geq 0$. Herpå ses, at $\tau_w \circ t = t \circ A_w$.

Vi betragter nu billedmålet $t(\mu)$, og skal vise at det er translationsinvariant, altså for alle $w \in \mathbb{R}$, at $\tau_w(t(\mu)) = t(\mu)$. Lad derfor $w \in \mathbb{R}$ være givet. Da $t : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ er målelig, og da $\tau_w : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ klart er målelig jf. lemma 4.8, og får, at
$$\tau_w(t(\mu)) = \tau_w \circ t(\mu) = t \circ A_w(\mu) = t(A_w(\mu)),$$
idet vi benytter sætning 10.2 på t og $A_w : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ er målelig jf. lemma 4.8. Kan vi nu vise, at de to mål $A_w(\mu)$ og μ er ens, er vi naturligvis færdige.

Vi husker, at $\mu = f \cdot m_k$. Vi har nu fra slide 6, den 4. oktober 2009, da $f \in \mathcal{M}^+$ og A_w er invertibel, at
$$A_w(\mu) = A_w(f \cdot m_k) = f \circ A_w^{-1} \cdot A_w(m_k) = |\det A_w^{-1}| f \circ A_w^{-1} \cdot m_k.$$

Målet $A_w(\mu)$ har altså tæthed $|\det A_w^{-1}|f \circ A_w^{-1}$ med hensyn til m_k. Lader vi $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ være givet, kan vi regne på denne tæthed:

$$\begin{aligned}
|\det A_w^{-1}|f \circ A_w^{-1}(x) &= \left|\det A_w^{-1}\right| f\left(\begin{pmatrix} e^{-w} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right) \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} e^{-w} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-w} \end{pmatrix}\right| f\begin{pmatrix} e^{-w}x_1 \\ \vdots \\ e^{-w}x_k \end{pmatrix} \\
&= \frac{|(e^{-w})^k|}{(\sqrt{(e^{-w}x_1)^2 + \cdots + (e^{-w}x_k)^2})^k} \\
&= \frac{(e^{-w})^k}{(e^{-w}(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2})^k} \\
&= \frac{(e^{-w})^k}{(e^{-w})^k \|x\|^k} \quad = \quad \frac{1}{\|x\|^k} \quad = \quad f(x).
\end{aligned}$$

Altså har $A_w(\mu)$ tæthed f med hensyn til m_k. Af dette får vi det ønskede, nemlig at $A_w(\mu) = f \cdot m_k = \mu$, hvorpå $\tau_w(t(\mu)) = t(A_w(\mu)) = t(\mu)$ for alle $w \in \mathbb{R}$. Altså er $t(\mu)$ translationsinvariant jf. definition 10.10.

Q3.2

Vi har nu, at $t(\mu)$ er et translationsinvariant mål defineret på $\mathbb{B}$ (jf. bemærkning). Vi skal vise, at $t(\mu) = c_k m$, hvor m er Lebesgue-målet og $c_k > 0$ en konstant. Det er her oplagt at benytte sætning 10.13, idet vi ved at $t(\mu)$ er translationsinvariant. Vi mangler nu blot at vise, at $t(\mu)$ er endelig på alle begrænsede mængder. Lad derfor en begrænset mængde A være givet. Der findes derpå et begrænset interval $B = (a, b)$, så $A \subset B$, og da $t(\mu)$ er et mål, følger nu af monotonicitet (lemma 2.5), at $t(\mu)(A) \leq t(\mu)(B)$. Kan vi vise, at $t(\mu)(B) < \infty$, er vi hjemme.

Vi går derfor direkte til værks. Med definition 10.1 og log-funktionens monotoni fås, at

$$\begin{aligned}
t(\mu)(B) = \mu(t^{-1}((a,b)) &= \mu(\{x \in \mathbb{R}^k \mid t(x) \in (a,b)\}) \\
&= \mu(\{x \in \mathbb{R}^k \mid \log\|x\| \in (a,b)\}) \\
&= \mu(\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (e^a, e^b)\}).
\end{aligned}$$

Vi har nu, at $1_{\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (e^a,e^b)\}}(x)$ giver 1 netop for de x, så $\|x\| \in (e^a, e^b)$, dvs. netop når $1_{(e^a,e^b)}(\|x\|) = 1$. Med sætning 6.19 og sætning 11.7 fås, idet f og indikatorfunktioner er $\mathcal{M}^+$, at

$$\begin{aligned}
t(\mu)(B) &\overset{6.19}{=} \int 1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)\mathrm{d}\mu(x) = \int 1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)\mathrm{d}f \cdot m_k(x) \\
&\overset{11.7}{=} \int 1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)\frac{1}{\|x\|^k}\mathrm{d}m_k(x) \\
&\overset{6.11}{\leq} \int 1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)e^{-ak}\mathrm{d}m_k(x),
\end{aligned}$$

idet vi i integralet kigger på x for hvilke $\|x\| > e^a$, altså dem for hvilke $\|x\|^{-k} < e^{-ak}$. Da altså $1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)\|x\|^{-k} \leq 1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)e^{-ak}$ for $x \in \mathbb{R}^k$, får vi ovenstående, da begge funktioner klart er $\mathcal{M}^+$ jf. lemma 5.9. Vi får nu da $e^{-ak} \geq 0$ og indikatorer er $\mathcal{M}^+$, at

$$\begin{aligned}
t(\mu)(B) &\overset{6.19}{\leq} e^{-ak}\int 1_{(e^a,e^b)}(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) \\
&\overset{6.19}{=} e^{-ak}m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (e^a,e^b)\}) \\
&\overset{2.5}{\leq} e^{-ak}m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < e^b\}) \\
&\overset{2.5}{\leq} e^{-ak}m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in (-e^b,e^b) \times \cdots \times (-e^b,e^b)\}) \\
&\overset{2.20}{\leq} e^{-ak}(2e^b)^k < \infty,
\end{aligned}$$

hvor vi benyttede, at $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (e^a,e^b)\} \subset \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < e^b\}$ (hvilket er klart), og at $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < e^b\} \subset \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in (-e^b,e^b) \times \cdots \times (-e^b,e^b)\}$, idet en kugle med radius r ligger inde i en kasse (terning) med sidelængde mindst $2r$. Altså er $t(\mu)(A) \leq t(\mu)(B) < \infty$, og pr. sætning 10.13 er $t(\mu) = c_k m$ med $c_k > 0$, idet $c_k = 0$ ville give nulmålet, som $t(\mu)$ tydeligt ikke er.

Vi ved fra bemærkningen, at $t(\mu)$ opfylder at målene $r(\mu)$ og $s \circ t(\mu)$ er ens. Vi har endvidere, at $t(\mu) = c_k m = c_k \cdot m$ (idet $\int 1_A c_k \mathrm{d}m = c_k m(A)$ for $A \in \mathbb{B}$) er et mål på $(\mathbb{R},\mathbb{B})$. Tætheden er altså den konstante funktion $x \mapsto c_k$.

Idet $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $s(t) = e^t$ er kontinuert og dermed målelig (jf. lemma 4.8), og vi lader $I = \mathbb{R}$ og $J = (0,\infty)$, ses, at s er en klar bijektion mellem I og J, at h^{-1}, som er givet ved $h^{-1}(y) = \log(y)$, er kontinuert differentiabel på $(0,\infty)$ med differentialkvotient $h^{-1\prime}(y) = y^{-1}$. Endelig er $t(\mu)(I^c) = t(\mu)(\emptyset) = 0$ pr. definition på et mål.

Pr. sætninger 10.2 og 12.6 fås nu, idet s og t er målelige, at $r(\mu) = s \circ t(\mu) = s(t(\mu)) = c_k g \cdot m$, hvor

$$g(r) = \begin{cases} c_k|r^{-1}| & \text{for } y \in (0,\infty) \\ 0 & \text{for } y \notin (0,\infty) \end{cases} = \begin{cases} c_k r^{-1} & \text{for } y > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

hvilket skulle vises.

Q3.3

Vi skal nu vise for $h \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R},\mathbb{B})$, at

$$\int h \circ r \mathrm{d}m_k = \int h(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) = c_k \int_0^\infty r^{k-1}h(r)\mathrm{d}r. \tag{1}$$

Lad derfor $h \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R},\mathbb{B})$. Af definitionen på r følger klart, at

$$\int h \circ r \mathrm{d}m_k = \int h(r(x))\mathrm{d}m_k(x) = \int h(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x).$$

Da $h(\|x\|) = h(\|x\|)\|x\|^k f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}^k$ undtagen for $x = 0$, er disse to funktioner ens m_k-næsten overalt. Begge funktioner er $\mathcal{M}^+$, da $h \circ r \in \mathcal{M}^+$

(jf. lemma 4.5 og da h er antaget ikke-negativ), $f \in \mathcal{M}^+$ og $x \mapsto \|x\|^k$ er ikke-negativ og kontinuert og målelig jf. lemma 4.8, hvorpå vi benytter lemma 5.9 – ligeledes er $x \mapsto h(\|x\|)\|x\|^k$ $\mathcal{M}^+$. Da har vi jf. sætning 6.23 og sætning 11.7, at

$$\begin{aligned}\int h(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) &\overset{6.23}{=} \int h(\|x\|)\|x\|^k f(x)\mathrm{d}m_k(x) \overset{11.7}{=} \int h(\|x\|)\|x\|^k \mathrm{d}f\cdot m_k(x)\\ &\overset{6.19}{=} \int 1_{[0,\infty)}(\|x\|)h(\|x\|)\|x\|^k \mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int 1_{[0,\infty)}(r(x))h(r(x))(r(x))^k \mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

da det er klart, at $1_{[0,\infty)}(\|x\|) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}^k$ og da $\mu = f \cdot m_k$. Da $r : (\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ er målelig, og $x \mapsto 1_{[0,\infty)}(x)h(x)x^k$ er en $\mathcal{M}^+$-funktion, har vi jf. sætning 10.8, at

$$\int h(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) \overset{10.8}{=} \int 1_{[0,\infty)}(y)h(y)y^k \mathrm{d}r(\mu)(y) = \int 1_{[0,\infty)}(y)h(y)y^k \mathrm{d}c_k g\cdot m(y),$$

da vi fandt i Q3.2, at $r(\mu) = c_k g \cdot m$. Idet $c_k g$ er ikke-negativ og målelig grundet kontinuitet på $(0,\infty)$ jf. opgave 4.11(b), er $c_k g \in \mathcal{M}^+$, og da $x \mapsto 1_{[0,\infty)}(x)h(x)x^k$ tillige er $\mathcal{M}^+$, får vi med sætning 11.7, at

$$\begin{aligned}&\int h(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) \overset{11.7}{=} \int 1_{[0,\infty)}(y)c_k g(y)h(y)y^k \mathrm{d}m(y)\\ =\ &\int 1_{(0,\infty)} c_k y^{-1} h(y)y^k \mathrm{d}y \overset{6.19}{=} c_k \int_0^\infty r^{k-1}h(r)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

med et lille variabelskift, hvormed det ønskede er vist. Til sidst blev lemma 5.9 i øvrigt benyttet, idet $r \mapsto 1_{(0,\infty)}(r)r^{k-1}$ er positiv, kontinuert og dermed $\mathcal{M}^+$.

Lad nu $h = 1_{[0,1]}$. Da er $h \in \mathcal{M}^+$; vi vil benytte denne til at vise, at $c_k = k m_k(B_k)$, hvor $B_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in [0,1]\}$ er den afsluttede enhedskugle i $\mathbb{R}^k$. Vi ser først med sætning 6.19, at

$$\int h(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) = \int 1_{[0,1]}(\|x\|)\mathrm{d}m_k(x) = \int 1_{B_k}\mathrm{d}m_k \overset{6.19}{=} m_k(B_k).$$

Vi ser dernæst, at

$$c_k\int_0^\infty r^{k-1}h(r)\mathrm{d}r = c_k\int_0^\infty r^{k-1}1_{[0,1]}(r)\mathrm{d}r = c_k\int_0^1 r^{k-1}\mathrm{d}r = c_k\left[\frac{1}{k}r^k\right]_0^1 = \frac{c_k}{k},$$

hvor vi undervejs benytter korollar 7.19 med funktionen $r \mapsto \frac{1}{k}r^k$ på $\mathbb{R}$, der er differentiabel med differentialkvotienten $r \mapsto r^{k-1}$, der er kontinuert på $\mathbb{R}$. Altså har vi, da vi har vist (**??**), at $m_k(B_k) = \frac{c_k}{k}$, hvorpå $c_k = k m_k(B_k)$.

Q3.4

Vi skal nu udregne

$$\int \frac{1}{(\|x\| + \lambda)^{1+\lambda}}\mathrm{d}m_k(x)$$

for $\lambda > 0$. Lad derfor $\lambda > 0$ være givet. Integranden er klart positiv og kontinuert, derfor målelig jf. lemma 4.8, og dermed $\mathcal{M}^+$. Da

$$\frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} = \frac{1_{[0,\infty)}(\|x\|)\|x\|^k}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}^k$ ($x = 0$ undtaget) er disse to funktioner ens m_k-næsten overalt jf. definition 6.21. Begge funktioner er $\mathcal{M}^+$, da integranden er $\mathcal{M}^+$, $f \in \mathcal{M}^+$ og $x \mapsto \|x\|^k$ fandtes at være $\mathcal{M}^+$ i Q3.3. Funktionen $x \mapsto (\|x\|+\lambda)^{-(1+\lambda)}\|x\|^k$ er $\mathcal{M}^+$ jf. lemma 5.9. Med sætning 6.23, og da $1_{[0,\infty)}(\|x\|) = 1$, er

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m_k(x) &= \int \frac{1_{[0,\infty)}(\|x\|)\|x\|^k}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} f(x) \mathrm{d}m_k(x) \\
&\overset{11.7}{=} \int \frac{1_{[0,\infty)}(\|x\|)\|x\|^k}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \frac{1_{[0,\infty)}(r(x))(r(x))^k}{(r(x)+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{10.8}{=} \int \frac{1_{[0,\infty)}(y)y^k}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}r(\mu)(y),
\end{aligned}$$

idet vi benytter sætning 10.8, da r var målelig (se Q3.3) og $x \mapsto 1_{[0,\infty)}(x)x^k(x+\lambda)^{-(1+\lambda)}$ er ikke-negativ og kontinuert på $[0,\infty)$ og dermed målelig jf. opgave 4.11(b); altså $\mathcal{M}^+$. Med det samme, samt hvad vi fandt om $r(\mu)$ i Q3.2, får vi ved sætning 11.7, at

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m_k(x) &= \int \frac{1_{[0,\infty)}(y)y^k}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}c_k g \cdot m(y) \\
&\overset{11.7}{=} \int c_k g(y) \frac{1_{[0,\infty)}(y)y^k}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m(y) \\
&\overset{6.19}{=} c_k \int \frac{1_{(0,\infty)}(y)y^{k-1}}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Lad $\phi(r) = 1_{(0,1)}(r)\lambda^{k-\lambda-1}r^{k-1}(1-r)^{\lambda-k}$. Lad endvidere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $h(x) = 1_{(0,\infty)}(x)\frac{x}{x+\lambda} = 1_{(0,\infty)}(x)(1 - \frac{\lambda}{x+\lambda})$. Vi har, at både ϕ og h er $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, da de er positive og målelige jf. opgave 4.11(b).

Lad nu $I = (0,\infty)$ og $J = (0,1)$. Da h klart er kontinuert differentiabel på $(0,\infty)$ med $h'(x) = \frac{\lambda}{(x+\lambda)^2}$, da den inverse funktion $h^{-1}(y) = \frac{\lambda y}{1-y}$ er kontinuert differentiabel på $(0,1)$, og da h er en klar bijektion mellem I og J, kan vi benytte sætning 12.7. Vi har først, at

$$\begin{aligned}
&\phi(h(y))|h'(y)| \\
= \;& 1_{(0,\infty)}(y)1_{(0,1)}\left(\frac{y}{y+\lambda}\right)\lambda^{k-\lambda-1}\left(\frac{y}{y+\lambda}\right)^{k-1}\left(1-\frac{y}{y+\lambda}\right)^{\lambda-k}\left|\frac{\lambda}{(y+\lambda)^2}\right| \\
= \;& 1_{(0,\infty)}(y)\lambda^{k-\lambda-1}\frac{y^{k-1}}{(y+\lambda)^{k-1}}\left(\frac{y+\lambda}{y+\lambda}-\frac{y}{y+\lambda}\right)^{\lambda-k}\frac{\lambda}{(y+\lambda)^2} \\
= \;& 1_{(0,\infty)}(y)\lambda^{k-\lambda}\frac{y^{k-1}}{(y+\lambda)^{k-1}}\frac{\lambda^{\lambda-k}}{(y+\lambda)^{\lambda-k}}\frac{1}{(y+\lambda)^2} \\
= \;& \frac{1_{(0,\infty)}(y)y^{k-1}}{(y+\lambda)^{k-1}(y+\lambda)^{\lambda-k}(y+\lambda)^2} = \frac{1_{(0,\infty)}(y)y^{k-1}}{(y+\lambda)^{1+\lambda}}.
\end{aligned}$$

hvor vi brugte, at $(0,\infty) \cap \{y \in \mathbb{R} | \frac{y}{y+\lambda} \in (0,1)\} = (0,\infty)$. Lader vi $A = (0,\infty) \subset I$, får vi ved sætning 12.7, at

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m_k(x) &= c_k \int_{(0,\infty)} \frac{1_{(0,\infty)}(y) y^{k-1}}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}y \\
&\overset{12.7}{=} c_k \int 1_{(0,1)}(z)\phi(z)\mathrm{d}r \\
&= c_k \int 1_{(0,1)}(z)\lambda^{k-\lambda-1} r^{k-1}(1-r)^{\lambda-k}\mathrm{d}r, \\
&\overset{6.19}{=} c_k \lambda^{k-\lambda-1} \int_0^1 r^{k-1}(1-r)^{\lambda-k}\mathrm{d}r \\
&\overset{8.2}{=} c_k \lambda^{k-\lambda-1} B(k, \lambda-k+1),
\end{aligned}$$

hvor vi med sætning 6.19 benytter, at integranden er $\mathcal{M}^+$. Vi får altså pr. eksempel 8.2 noget med Beta-funktionen, men disse er kun defineret som sådan, hvis $k > 0$ (hvilket klart er opfyldt) og $\lambda - k + 1 > 0$, dvs. hvis $\lambda > k - 1$. Vi vil derfor undersøge, hvad der sker, hvis vi lader $\lambda \leq k - 1$, dvs. $k \geq \lambda + 1$. Vi får nu med tidligere udregninger, at

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m_k(x) &\overset{6.11}{\geq} c_k \int \frac{1_{(1,\infty)}(y) y^{k-1}}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}y \\
&\overset{6.11}{\geq} c_k \int 1_{(1,\infty)}(y) \frac{y^{\lambda}}{(y+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}y \\
&= c_k \int 1_{(1,\infty)}(y) \left(\frac{y}{y+\lambda}\right)^{\lambda} \frac{1}{y+\lambda} \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

hvor vi igen benytter, at integranderne er $\mathcal{M}^+$ (positive, kontinuerte og målelige med opgave 4.11(b)). Vi har nu for alle $y \in \mathbb{R}$, at

$$1_{(1,\infty)}(y) \left(\frac{y}{y+\lambda}\right)^{\lambda} \frac{1}{y+\lambda} \geq 1_{(1,\infty)}(y) \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\lambda} \frac{1}{y+\lambda},$$

idet funktionen $y \mapsto \frac{y}{y+\lambda}$ er voksende på $(1,\infty)$, hvorpå $\frac{y}{y+\lambda} \geq \frac{1}{1+\lambda}$ for $y > 1$. Vi får nu, at

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m_k(x) &\overset{6.11}{\geq} c_k \int 1_{(1,\infty)}(y) \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\lambda} \frac{1}{y+\lambda} \mathrm{d}y \\
&\overset{6.19}{=} c_k \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\lambda} \int_1^{\infty} \frac{1}{y+\lambda} \mathrm{d}y \\
&\overset{7.23}{=} c_k \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\lambda} \int_{\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{r} \mathrm{d}r \overset{6.16}{=} \infty,
\end{aligned}$$

idet vi i eksempel 6.16 bare erstatter intervallet $(1,\infty)$ med $(\lambda+1,\infty)$ og lader rækken gå fra det mindste naturlige tal større end $\lambda+1$ i stedet. Undervejs blev benyttet substitution med $r = y + \lambda$. Altså har vi for alle $\lambda > 0$, at

$$\int \frac{1}{(\|x\|+\lambda)^{1+\lambda}} \mathrm{d}m_k(x) = \begin{cases} c_1 \lambda^{-\lambda} B(1,\lambda) & \text{for } k = 1 \\ c_k \lambda^{k-\lambda-1} B(k, \lambda-k+1) & \text{for } \lambda > k-1 \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}$$