MI 2009-10

2. november 2009

EH henviser til "Measure theory", **CB** henviser til "Fourier transformationen", **JL** henviser til "A non-rigorous motivation..." og **FR** henviser til "Funktionsrum".

Opgave 1

Vi definerer funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = 1_{[-1,1]}(x)x = \begin{cases} x & \text{for } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Q1.1

Vi skal nu finde $\mathcal{F}f$ og vise, at $\hat{f}(0) = 0$.

Vi definerer derfor funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $h(x) = 1_{[-1,1]}(x)$, hvorpå vi ser, at $f(x) = xh(x)$ for $x \in \mathbb{R}$. Vi har klart, at $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, da $\int |h| \mathrm{d}m = \int 1_{[-1,1]} \mathrm{d}m = m([-1,1]) = 2 < \infty$ (EH sætning 6.19).

Da vi har for alle $x \in \mathbb{R}$, at $|f(x)| = |x||1_{[-1,1]}(x)| \leq |1_{[-1,1]}(x)| = |h(x)|$, samt at $|h|, |f| \in \mathcal{M}^+$ (EH definition 5.7, da funktionerne er positive og målelige jf. EH opgave 4.11(b)), følger det af EH sætning 6.11, at $\int |f| \mathrm{d}m \leq \int |h| \mathrm{d}m < \infty$, hvorpå $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Nu giver CB sætning 8.6(i), at $\hat{h} \in C^1(\mathbb{R})$ og for alle $\xi \in \mathbb{R}$, at

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}(xh(x))(\xi) = i\hat{h}'(\xi).$$

Det genstår nu blot at finde $\hat{h}'$. Da $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, fås pr. CB definition 8.1 for $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, at

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} h(x) \mathrm{d}x = \int 1_{[-1,1]}(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \\
&= \int 1_{[-1,1]}(x) \cos(\xi x) \mathrm{d}x - i \int 1_{[-1,1]}(x) \sin(\xi x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \cos(\xi x) \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(\xi x)}{\xi} \right]_{-1}^{1} = \frac{\sin(\xi)}{\xi} - \frac{\sin(-\xi)}{\xi} = \frac{2\sin(\xi)}{\xi},
\end{aligned}$$

hvor vi benyttede EH opgave 10.12 ved fjerde lighedstegn, idet $1_{[-1,1]} \sin$ er ulige, og ved tredje, at $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$.
Vi har, da $\hat{h}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^0 h(x) \mathrm{d}x = \int_{[-1,1]} \mathrm{d}x = 2$, at

$$\hat{h}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sin(\xi)}{\xi} & \text{for } \xi \neq 0 \\ 2 & \text{for } \xi = 0. \end{cases}$$

Da vi endvidere har, at $\hat{h}$ er C^1, er den altså kontinuert differentiabel, og med produktreglen fås for alle $\xi \in \mathbb{R}$, at

$$\hat{h}'(\xi) = \begin{cases} \frac{2\cos(\xi)}{\xi} - \frac{2\sin(\xi)}{\xi^2} & \text{for } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{for } \xi = 0. \end{cases}$$

Altså har vi, at $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er givet ved

$$\hat{f}(\xi) = i\hat{h}'(\xi) = \begin{cases} 2i\left(\frac{\cos(\xi)}{\xi} - \frac{\sin(\xi)}{\xi^2}\right) & \text{for } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{for } \xi = 0, \end{cases}$$

og det ses klart heraf, at $\hat{f}(0) = 0$. Pr. CB definition 8.1 kan dog også ses, at $\hat{f}(0) = \int_{-1}^{1} x \mathrm{d}x = 0$.

Q1.2

Vi definerer nu funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{\cos(\xi)}{\xi} - \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} & \text{for } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{for } \xi = 0. \end{cases}$$

Der skal forklares, hvorfor $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Det ses først, at $g = -{}^{i}/_{2}\hat{f}$. Vi har derfor, at $|g|^2 = |-{}^{i}/_{2}\hat{f}|^2 = |-{}^{i}/_{2}|^2|\hat{f}|^2 = {}^{1}/_{4}|\hat{f}|^2$, idet $|-{}^{i}/_{2}|^2$ netop angiver kvadratet på modulus af det komplekse tal $-{}^{i}/_{2}$.

Vi betragter f fra Q1.1, og ser nu, at

$$\int |f|^2 \mathrm{d}m = \int (1_{[-1,1]}(x))^2 x^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3} < \infty,$$

hvorpå $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Vi har nu jf. CB sætning 8.24, da vi fandt i Q1.1, at $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, at $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$. Vi kan derpå benytte Parsevals ligning, CB sætning 8.22, på f (idet vi betragter f ved sin ækvivalensklasse $[f] \in L_2(\mathbb{R})$), hvorpå vi får, at

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \int |\mathcal{F}_2 f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = 2\pi \int |f|^2 \mathrm{d}m = \frac{4\pi}{3}$$

fra ovenstående udregninger. Vi får dermed med EH sætning 6.19, at

$$\int |g(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{4} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} < \infty,$$

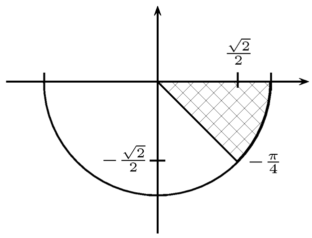
hvorpå det ses, at $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, og $\|g\|_2 = ({}^{\pi}/_{3})^{1/2} = {}^{\sqrt{3\pi}}/_{3}$, hvor $\|\cdot\|_2$ angiver seminormen på $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

Det skal tillige afgøres, om $\xi g(\xi)$ ligger i $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ eller ej. For at afgøre dette, betragtes nu intervallerne $[-{}^{\pi}/_{4} + 2\pi n, 2\pi n]$ for $n = 1, 2, \ldots$. Lad $n \in \mathbb{N}$ og $x \in [-{}^{\pi}/_{4} + 2\pi n, 2\pi n]$. Nu gælder (hvilket også kan ses ved ovenstående figur), at $\cos(x) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ og at $\sin(x) \leq 0$, dvs. $-\sin(x) \geq 0$.

Vi får nu, at $x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x) + (-\sin(x)) \geq x\cos(x) \geq 0$, idet $x \geq 0$, $\cos(x) \geq 0$ og $-\sin(x) \geq 0$; altså, at $|x\cos(x) - \sin(x)| \geq |x||\cos(x)|$. Dermed fås for $\xi \in [-{}^{\pi}/_{4} + 2\pi n, 2\pi n]$, at

$$|\xi g(\xi)|^2 = \left|\cos(\xi) - \frac{\sin(\xi)}{\xi}\right|^2 = \frac{|\xi\cos(\xi) - \sin(\xi)|^2}{|\xi|^2} \geq \frac{(|\xi||\cos(\xi)|)^2}{|\xi|^2},$$

Figur 1: Enhedscirklen og intervallet $[-\pi/4 + 2\pi n, 2\pi n]$.



og derfor, at $|\xi g(\xi)|^2 \geq |\cos(\xi)|^2$. Da vi ydermere for $\xi \in [-\pi/4 + 2\pi n, 2\pi n]$ havde, at $\cos(\xi) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, får vi nu, at $|\cos(\xi)| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$, og derfor, at

$$|\xi g(\xi)|^2 \geq |\cos(\xi)|^2 \geq \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

for alle $\xi \in [-\pi/4 + 2\pi n, 2\pi n]$.

Vi definerer nu $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-\pi/4 + 2\pi n, 2\pi n]$. Vi må have, at $|\xi g(\xi)|^2 \geq \frac{1}{2}$ for $\xi \in A$, dvs. $1_A(\xi)|\xi g(\xi)|^2 \geq 1_A(\xi)\frac{1}{2}$ for $\xi \in \mathbb{R}$.

Da $\xi \mapsto |\xi g(\xi)|^2$ er $\mathcal{M}^+$ (kontinuert, da g er kontinuert og dermed målelig jf. EH lemma 4.8, samt ikke-negativ) og $\xi \mapsto 1_A(\xi)|\xi g(\xi)|^2$ (da foregående funktion var kontinuert, og ved brug af EH opgave 4.11(b)) ligeså er $\mathcal{M}^+$, får vi nu jf. EH sætning 6.11, thi $|\xi g(\xi)|^2 \geq 1_A(\xi)|\xi g(\xi)|^2$ for alle $\xi \in \mathbb{R}$, at

$$\begin{aligned}
\int |\xi g(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \quad &\overset{6.11}{\geq} \quad \int 1_A(\xi)|\xi g(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \overset{6.11}{\geq} \int 1_A(\xi)\frac{1}{2}\mathrm{d}\xi \overset{6.19}{=} \frac{1}{2}m(A) \\
&= \quad \frac{1}{2}m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, 2\pi n]\right) \\
&\overset{2.3,2.2}{=} \quad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} m\left([-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, 2\pi n]\right) \overset{2.16}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\pi n - 2\pi n + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4} = \infty,
\end{aligned}$$

hvor vi undervejs bruger, at Lebesgue-målet er σ-additivt. Altså er $\xi g(\xi)$ ikke en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$-funktion. (Henvisningerne ovenfor er til EH.)

Opgave 2

Vi betragter den partielle differentialligning

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{1}$$

Vi søger en løsning til denne, φ, som opfylder initialbetingelsen $\varphi(x,0) = \psi(x)$ for $x \in \mathbb{R}$, hvor funktionen $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ er givet.
Vi antager naturligt, at φ er C^2 på hele $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ og kontinuert på $\mathbb{R} \times [0,\infty)$.
I tillæg til dette antages også, at

- funktionen $x \mapsto \varphi(x,y)$ er integrabel på $\mathbb{R}$ for alle (faste) $y > 0$,
- $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ og $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ er integrable som funktioner af $x \in \mathbb{R}$ og for faste $y > 0$,
- for hvert begrænset interval $I \subset (0,\infty)$ findes en funktion $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, så $|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)| \leq h(x)$ for $x \in \mathbb{R}$ og $y \in I$.

Q2.1

Vi lader $\xi \mapsto \hat{\varphi}(\xi, y)$ betegne Fourier-transformationen af snitfunktionen $x \mapsto \varphi(x,y)$. Under antagelse af, at φ er en løsning til (1), skal vises, at $\hat{\varphi}$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}(\xi, y) = -\xi^2 \hat{\varphi}(\xi, y), \quad (\xi, y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{2}$$

Lad $\xi \in \mathbb{R}$ være givet. Vi ved pr. CB definition 8.1, at

$$\hat{\varphi}(\xi, y) = \int e^{-i\xi x} \varphi(x,y) \mathrm{d}x.$$

Vi ved, at snitfunktionerne $x \mapsto e^{-i\xi x}\varphi(x,y)$ er integrable, idet $\int |e^{-i\xi x}\varphi(x,y)|\mathrm{d}x = \int |\varphi(x,y)|\mathrm{d}x < \infty$ (da $|e^{i\theta}| = 1$ for $\theta \in \mathbb{R}$), og da de endvidere er kontinuerte, er de også målelige (jf. EH lemma 4.8), på hele $\mathbb{R}$ for hvert fast $y > 0$.

Vi ved yderligere, at φ er C^2 på $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, så specielt er snitfunktionerne $y \mapsto e^{-i\xi x}\varphi(x,y)$ differentiable på $(0,\infty)$ for alle faste $x \in \mathbb{R}$.

Vi ved desuden, at der for hvert begrænset interval $I \subset (0,\infty)$ findes en funktion $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, så $|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)| \leq h(x)$ for $x \in \mathbb{R}$ og $y \in I$. Lader vi $y \in (0,\infty)$ være fast, kan vi specielt lave et begrænset interval $I \subset (0,\infty)$ omkring y, så

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} e^{-i\xi x} \varphi(x,y) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x,y) \right| \leq h(x),$$

hvor h er en integrabel majorant, hvorpå vi kan finde en integrabel majorant for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in (0,\infty)$, da vi lod y være vilkårlig. Altså har vi jf. EH sætning 8.14 for alle $\xi \in \mathbb{R}$ og $y \in (0,\infty)$, at

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}(\xi, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int e^{-i\xi x} \varphi(x,y) \mathrm{d}x = \int e^{-i\xi x} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x,y) \mathrm{d}x = \int e^{-i\xi x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) \mathrm{d}x,$$

hvor vi benyttede (1) til sidst.

Sidste udtryk er netop lig $\mathcal{F}(\partial^2\varphi/\partial x^2)(\xi, y)$ (jf. CB definition 8.1 - den giver mening, da $\partial^2\varphi/\partial x^2$ er antaget integrabel), så vi får, da $x \mapsto \varphi(x,y)$ er C^2 på hele $\mathbb{R}$, hvorpå $x \mapsto \partial\varphi/\partial x(x,y)$ er C^1 på hele $\mathbb{R}$, og da $x \mapsto \partial^2\varphi/\partial x^2(x,y)$ er antaget integrabel på hele $\mathbb{R}$, får vi pr. CB sætning 8.6(ii), at

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}(\xi, y) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)(\xi, y) = i\xi \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(\xi, y) = i^2\xi^2 \hat{\varphi}(\xi, y) = -\xi^2 \hat{\varphi}(\xi, y),$$

idet vi benytter CB sætning 8.6(ii) igen, da $x \mapsto \varphi(x,y)$ er C^2 og specielt C^1 på hele $\mathbb{R}$, og da $x \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ er antaget integrabel på hele $\mathbb{R}$. Dermed er det ønskede vist for alle $(\xi, y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Q2.2

Der skal argumenteres for, at den fuldstændige løsning til differentialligningen (2) er på formen

$$\hat{\varphi}(\xi, y) = c(\xi)e^{-\xi^2 y}, \quad (\xi, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

hvor $c(\xi)$ er en arbitrær konstant, afhængig af ξ. Lad derfor $\xi \in \mathbb{R}$ være fast. Vi betragter snitfunktionerne $y \mapsto \frac{\partial}{\partial y}\hat{\varphi}(\xi, y)$ og $y \mapsto -\xi^2\hat{\varphi}(\xi, y)$ defineret på $(0, \infty)$. Da funktionerne $y \mapsto \xi^2$ og $y \mapsto 0$ er kontinuerte på det åbne interval $(0, \infty)$, og da $y \mapsto \xi^2 y$ er en stamfunktion til $y \mapsto \xi^2$, finder vi jf. Kalkulus sætning 10.1.3, at den fuldstændige løsning til differentialligningen (2) omskrevet til

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y}(\xi, y) + \xi^2\hat{\varphi}(\xi, y) = 0$$

på $(0, \infty)$ er givet ved funktionerne $y \mapsto f(\xi, y)$, hvor

$$f(\xi, y) = e^{-\xi^2 y}\left(\int e^{\xi^2 y} 0 \mathrm{d}y + c(\xi)\right) = c(\xi)e^{-\xi^2 y},$$

hvor c er en arbitrær konstant afhængig af ξ (se evt. JL s. 5). Vi har dermed det ønskede for $(\xi, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, da $f = \hat{\varphi}$.

Under antagelse af, at initialbetingelsen $\varphi(x, 0) = \psi(x)$ for $x \in \mathbb{R}$ er opfyldt, skal vises, at $c(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$. Lad ξ være givet i det følgende, samt initialbetingelsen være opfyldt.

For fast $x \in \mathbb{R}$ ses, at $e^{-i\xi x}\varphi(x, 1/n+1) \to e^{-i\xi x}\varphi(x, 0) = e^{-i\xi x}\psi(x)$ for $n \to \infty$, da $y \mapsto \varphi(x, y)$ er antaget kontinuert på $[0, \infty)$ for fast $x \in \mathbb{R}$. Vi definerer derfor funktionsfølgen (f_n) ved $f_n(x) = e^{-i\xi x}\varphi(x, 1/n+1)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Disse funktioner er kontinuerte for alle $n \in \mathbb{N}$, da $x \mapsto \varphi(x, y)$ er kontinuert på $\mathbb{R}$ for fast $y > 0$ og den komplekse eksponentialfunktion er kontinuert (da den er differentiabel), så pr. EH lemma 4.8 er de målelige, og dermed alle $\mathcal{M}$-funktioner.

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ være givet. Vi har, at $|f_n(x)| = |\varphi(x, 1/n+1)|$. Da $y \mapsto \varphi(x, y)$ er C^2 på $(0, \infty)$, er den differentiabel på $(1/n+1, 1)$ og kontinuert på $[1/n+1, 1]$. Vi ved nu pr. Middelværdisætningen, Kalkulus sætning 6.2.3, at der findes $\delta \in (1/n+1, 1)$, så

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \delta) = \frac{\varphi(x, 1) - \varphi(x, \frac{1}{n+1})}{1 - \frac{1}{n+1}},$$

dvs. så $\varphi(x, 1/n+1) = \varphi(x, 1) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \delta)(1 - 1/n+1)$. Men nu må gælde pr. trekantsuligheden, og da $|1 - 1/n+1| \leq 1$, at

$$\left|\varphi\left(x, \frac{1}{n+1}\right)\right| \leq |\varphi(x, 1)| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \delta)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right| \leq |\varphi(x, 1)| + h(x),$$

hvor h er en integrabel majorant for $|\frac{\partial \varphi}{\partial y}|$ på det begrænsede interval $(0, 1)$ (som indeholder intervallet, hvori δ er), hvilken vi kan vælge pr. antagelse. Vi har ligeledes, at $x \mapsto \varphi(x, 1)$ er integrabel pr. antagelse, hvorpå $x \mapsto |\varphi(x, 1)|$ også er det – summen er integrabel jf. EH sætning 7.3. Altså har vi, at

$$|f_n(x)| \leq |\varphi(x, 1)| + h(x),$$

og dermed er fundet en integrabel majorant for $|f_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Det følger nu af Majorantsætningen (EH sætning 7.6), at

$$\hat{\varphi}(\xi, {}^1\!/\!{}_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(x, {}^1\!/\!{}_{n+1})\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\psi(x)\mathrm{d}x = \hat{\psi}(\xi)$$

for $n \to \infty$, pr. CB definition 8.1, da vi lod initialbetingelsen være opfyldt. Da vi endvidere har, at

$$\hat{\varphi}(\xi, {}^1\!/\!{}_{n+1}) = c(\xi)e^{-\xi^2\frac{1}{n+1}} \to c(\xi)e^{-\xi^2\cdot 0} = c(\xi),$$

for $n \to \infty$, da eksponentialfunktionen er kontinuert, og at der er entydighed i grænseværdierne, må $c(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$ for $\xi \in \mathbb{R}$.

Q2.3

Der skal findes en funktion $\eta(x, y)$, således at Fourier-transformationen af snitfunktionen $x \mapsto \eta(x, y)$ er givet ved

$$\hat{\eta}(\xi, y) = e^{-\xi^2 y}, \quad (\xi, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

For overhovedet at komme med et kvalificeret bud, er her blevet brugt inversionsformlen med kvadratsætninger og komplekse substitutioner. Vi vælger således at gætte på, at $\eta : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$\eta(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Vi lader i det følgende $y \in (0, \infty)$ være fast og betragter dermed snitfunktionen $x \mapsto \eta(x, y)$. η er integrabel, da

$$\int \eta(x, y)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\mathrm{d}\alpha = 1 < \infty,$$

jf. EH eksempel 12.18 og sætning 12.7, hvor vi benytter den bijektive, kontinuert og dermed målelige funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $h(x) = {}^x\!/\!{}_{\sqrt{2y}}$; idet h er en bijektion mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$, h klart er $C^1(\mathbb{R})$ og $h^{-1}(\alpha) = \sqrt{2y}\alpha$ er $C^1(\mathbb{R})$, kan benytte $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

som er positiv, kontinuert og målelig. Vi har pr. JL opgave 4(1.3), at $\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = |a|^{-1}\hat{f}({}^\xi\!/\!{}_a)$ for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definerer vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = e^{-x^2/2},$$

ses, at den er integrabel og ligger i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ jf. EH eksempel 12.18, da den er ikkenegativ. Vi har fra CB eksempel 8.3, at Fourier-transformationen $\hat{f}$ er givet ved $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$. Sættes $a = {}^1\!/\!{}_{\sqrt{2y}}$, får vi, at

$$f(ax) = e^{-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}x\right)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{4y}} = 2\sqrt{\pi y}\eta(x, y).$$

Vi har nu for Fourier-transformationen $\hat{\eta}$, at

$$\begin{aligned}\hat{\eta}(\xi,y) &= \mathcal{F}\left(\frac{(f(ax))(\xi)}{2\sqrt{\pi y}}\right) = \frac{\mathcal{F}(f(ax))(\xi)}{2\sqrt{\pi y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^{-1}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{2y\xi^2}{2}} = \frac{2\sqrt{\pi y}}{2\sqrt{\pi y}}e^{-\xi^2 y} = e^{-\xi^2 y},\end{aligned}$$

for $\xi \in \mathbb{R}$ og alle $y \in (0,\infty)$, da vi lod y være fast – vi brugte ved første lighedstegn, at Fourier-transformationen som afbildning er lineær (jf. CB sætning 8.2), hvorpå skalarer kan flyttes ud foran afbildningen.

Altså har vi fundet en funktion η, så Fourier-transformationen af snitfunktionen $x \mapsto \eta(x,y)$ er som ønsket.

Q2.4

Vi definerer afbildningen $\psi_0 : \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ ved $\psi_0(x,y) = \psi(x)$. Vi ved nu fra Q2.2 og Q2.3 for fast $y > 0$, at

$$\hat{\varphi}(\xi,y) = e^{-\xi^2 y}c(\xi) = \hat{\eta}(\xi,y)\hat{\psi}(\xi) = \mathcal{F}(\eta \star \psi_0)(\xi,y),$$

idet vi benytter CB sætning 8.18, hvor vi ved pr. antagelser, at $\psi_0 = \psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ (for fast y) og fra Q2.3, at $\eta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Vi vil nu gerne benytte inversionsformlen med ovenstående viden til at vise, at løsningen φ til (1) med initialbetingelse $\varphi(x,0) = \psi(x)$ kan skrives som

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4y}}\psi(t)\mathrm{d}t, \quad (x,y) \in \mathbb{R}\times(0,\infty).$$

Lad $y \in (0,\infty)$ være givet. Vi vil derfor gerne benytte sætning 8.8*.

Da funktionen $x \mapsto \varphi(x,y)$ er integrabel og kontinuert, følger af beviset for CB sætning 8.6(ii), at $\varphi(x,y) \to 0$ for $x \to \pm\infty$. Da $x \mapsto \varphi(x,y)$ er kontinuert, følger, at den ikke går imod $\pm\infty$ for x gående imod nogen værdi i $\mathbb{R}$ (thi gjorde den andet, var den ikke kontinuert). Vi må altså have, at afbildningen er begrænset, og at funktionen ligger i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$.

Vi har, at $\hat{\varphi}(\xi,y) = \hat{\eta}(\xi,y)\hat{\psi}(\xi)$. Idet $\hat{\eta}$ er ξ-integrabel, thi den er kontinuert på for alle $\xi \in \mathbb{R}$, målelig og ikke-negativ, hvorpå EH sætning 12.7 giver, at

$$\int |\hat{\eta}(\xi,y)|\mathrm{d}\xi = \int e^{-\xi^2 y}\mathrm{d}\xi = \int \frac{1}{\sqrt{2y}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\mathrm{d}\alpha < \infty,$$

hvor vi benytter den bijektive, kontinuert og dermed målelige funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $h(\xi) = \sqrt{2y}\xi$. Det ses, at h er en bijektion mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$, h klart er $C^1(\mathbb{R})$ og $h^{-1}(\alpha) = \alpha/\sqrt{2y}$ er $C^1(\mathbb{R})$, og vi benytter $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

som er positiv, kontinuert og målelig. Sidst benyttedes EH eksempel 6.17 og sætning 6.19. Nu er

$$\int |\hat{\varphi}(\xi,y)|\mathrm{d}\xi = \int |\hat{\eta}(\xi,y)\hat{\psi}(\xi)|\mathrm{d}\xi \le Q\int |\hat{\eta}(\xi,y)|\mathrm{d}\xi < \infty,$$

hvor vi benyttede EH sætning 6.19, thi $\hat{\psi}$ er begrænset af en konstant Q jf. CB sætning 8.2. Heraf følger, at $\hat{\varphi} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og $\mathcal{F}(\eta \star \psi_0) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Da η og ψ_0 er integrable jf. hhv. antagelser og Q2.3, følger af CB sætning 8.16, at $\eta \star \psi_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, og da $\eta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, samt da $\psi_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, følger af samme overvejelser som ovenfor for φ, at $\psi_0 \in C_b(\mathbb{R})$, hvorpå vi har jf. CB sætning 8.14, at $\eta \star \psi_0 \in C_b(\mathbb{R})$, og dermed $\eta \star \psi_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$.

Altså er alle forudsætninger for at bruge CB sætning 8.8* opfyldt, og vi får da for $x \in \mathbb{R}$ og $y \in (0, \infty)$, at

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &\overset{8.8*}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{\varphi}(\xi, y) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{\eta}(\xi, y) \hat{\psi}(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{\eta}(\xi, y) \hat{\psi}_0(\xi, y) \mathrm{d}\xi \\
&\overset{8.18}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\eta \star \psi_0)(\xi, y) \mathrm{d}\xi \\
&\overset{8.8*}{=} (\eta \star \psi_0)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \eta(x-t, y) \psi_0(t, y) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4y}} \psi(t) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

hvor vi henviser til CB undervejs. Altså ses, at løsningen φ til (1) kan opskrives på ovenstående form.

Opgave 3

Lad $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en bijektiv Borel-målelig funktion, så $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er C^1. Antag tillige, at der findes en konstant $C \in [0, 1)$, så

$$|(h^{-1})'(y)| \leq C$$

for alle $y \in \mathbb{R}$.

Q3.1

Vi skal nu vise, at hvis $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, så vil $f \circ h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ og

$$\|f \circ h\|_1 \leq C \|f\|_1.$$

Da $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, eksisterer $\|f\|_1 = \int |f| \mathrm{d}m < \infty$.

Vi har, at $\int |f \circ h| \mathrm{d}m = \int |(f \circ h)(x)| \mathrm{d}m(x) = \int |f(x)| \mathrm{d}h(m)(x)$ med EH sætning 10.8, idet $|f| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ – da $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ (jf. FR s. 6) og da vi benytter EH lemma 5.8 – og idet $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er antaget målelig.

Da vi ved, at h er Borel-målelig, at h er en bijektion mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$ og $h^{-1} \in C^1(\mathbb{R})$ pr. antagelse, følger nu jf. EH sætning 12.5, at $h(m_{\mathbb{R}}) = h(m) = g \cdot m$, hvor $g(y) = |(h^{-1})'(y)|$, idet Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$ restringeret til $\mathbb{R}$, $m_{\mathbb{R}}$, er Lebesgue-målet m på $\mathbb{R}$ selv.

h^{-1} er antaget $C^1(\mathbb{R})$, så vi ved, at $(h^{-1})'$ er kontinuert på $\mathbb{R}$, hvormed $(h^{-1})'$ er målelig jf. EH lemma 4.8. Jf. EH definition 5.1 fås, at $(h^{-1})' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, hvorpå $g = |(h^{-1})'| \in \mathcal{M}^+$ jf. EH lemma 5.2 og 5.8. Da vi endvidere har, at $|f| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, får vi jf. EH sætning 11.7, at

$$\int |f \circ h| \mathrm{d}m = \int |f(x)| \mathrm{d}g \cdot m(x) = \int |f(x)(h^{-1})'(x)| \mathrm{d}x \leq \int |f(x)| C \mathrm{d}x,$$

jf. EH sætning 6.11, idet $x \mapsto C$ er kontinuert, målelig og ikke-negativ. Vi har nu med EH sætning 6.19, at $\int |f \circ h| \mathrm{d}m \leq C \int |f(x)| \mathrm{d}x = C\|f\|_1 < \infty$. Altså er $f \circ h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ (jf. FR s. 6) og $\|f \circ h\|_1 \leq C\|f\|_1$.

Q3.2

Vi definerer nu rekursivt $h^{\circ n} = h \circ h^{\circ(n-1)}$ og $h^{\circ 1} = h$. Tillige lades $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ og funktionerne f_n defineres ved

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f \circ h^{\circ k}.$$

Vi skal vise, at $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f \circ h^{\circ k}\|_1 < \infty.$$

Vi viser, at $f \circ h^{\circ k} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ for alle $k \in \mathbb{N}$ ved induktion. Induktionsstarten er opfyldt ved Q3.1, da $f \circ h^{\circ 1} = f \circ h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$. Under antagelse af, at $h^{\circ k} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, har vi, at $f \circ h^{\circ(k+1)} = f \circ (h \circ h^{\circ k}) = f \circ (h^{\circ k} \circ h)$. Da sammensætning af afbildninger er en associativ komposition, har vi, at $f \circ h^{\circ(k+1)} = (f \circ h^{\circ k}) \circ h$. Da vi fandt i Q3.1, at $g \circ h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, hvis $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, kan vi sætte $g := (f \circ h^{\circ k})$, hvorpå vi får, at $h^{\circ(k+1)} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, og dermed, at $f \circ h^{\circ k} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Vi viser tillige, at $\int |f \circ h^{\circ k}| \mathrm{d}m \leq C^k \|f\|_1$ for alle $k \in \mathbb{N}$, hvor C var konstanten fra de oprindelige antagelser, ved induktion. Induktionsstarten følger af, at $\int |f \circ h^{\circ 1}| \mathrm{d}m = \int |f \circ h| \mathrm{d}m = \|f \circ h\|_1 \leq C\|f\|_1$, fra Q3.1. Under antagelse af, at $\int |f \circ h^{\circ k}(x)| \mathrm{d}x \leq C^k \|f\|_1$, har vi, at

$$\int |f \circ h^{\circ(k+1)}(x)| \mathrm{d}x = \int |(f \circ h^{\circ k}) \circ h(x)| \mathrm{d}x = \int |(f \circ h^{\circ k})(x)| \mathrm{d}h(m)(x)$$

med EH sætning 10.8, idet $|f \circ h^{\circ k}| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ – da $f \circ h^{\circ k}$ var integrabel (jf. FR s. 6) og da vi benytter EH lemma 5.8 – og idet $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er antaget målelig. Ved vores udregninger og overvejelser i Q3.1 fås med EH sætning 6.11 og 6.19, at

$$\begin{aligned} \int |f \circ h^{\circ(k+1)}(x)| \mathrm{d}x &= \int |(f \circ h^{\circ k})(x)| |(h^{-1})'(x)| \mathrm{d}x \\ &\leq C \int |(f \circ h^{\circ k})(x)| \mathrm{d}x \quad \leq \quad C^{k+1} \|f\|_1, \end{aligned}$$

pr. induktionsantagelsen. Altså er $\int |f \circ h^{\circ k}| \mathrm{d}m \leq C^k \|f\|_1 < \infty$ for alle $k \in \mathbb{N}$, og dermed, at $\|f \circ h^{\circ k}\|_1 \leq C^k \|f\|_1$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da er

$$\int |f_n| \mathrm{d}m = \int \left| \sum_{k=1}^{n} f \circ h^{\circ k} \right| \mathrm{d}m \le \int \sum_{k=1}^{n} \left| f \circ h^{\circ k} \right| \mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n} \int \left| f \circ h^{\circ k} \right| \mathrm{d}m.$$

Det sidste lighedstegn følger af EH sætning 6.19, da $f \circ h^{\circ k} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ for alle $k \in \mathbb{N}$, hvorpå den er målelig (jf. FR. s. 6) og funktionen numerisk er $\mathcal{M}^+$ jf. EH lemma 5.2 og 5.8. Ulighedstegnet følger af trekantsuligheden og EH lemma 5.9, hvorpå $\sum_{k=1}^{n} |f \circ h^{\circ k}|$ er $\mathcal{M}^+$, og da $f \circ h^{\circ k}$ er målelig for alle $k \in \mathbb{N}$, følger af EH lemma 5.3, 5.2 og 5.8 (i rækkefølge), at $|\sum_{k=1}^{n} f \circ h^{\circ k}|$ er $\mathcal{M}^+$. Da vi nu har, at

$$\int |f_n| \mathrm{d}m \le \sum_{k=1}^{n} \int \left| f \circ h^{\circ k} \right| \mathrm{d}m \le \sum_{k=1}^{n} C^k \|f\|_1 < \infty,$$

har vi, at $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Altså eksisterer $\|f_n\|_1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Endvidere har vi, da rækken $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|f\|_1$ er konvergent (idet $C \in [0, 1)$, hvorpå rækken er en konvergent geometrisk række, jf. Kalkulus sætning 12.1.1), får vi, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \|f \circ h^{\circ k}\|_1$ ligeledes er konvergent jf. Kalkulus sætning 12.2.6, thi $\|f \circ h^{\circ k}\|_1 \le C^k \|f\|_1$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Det ses desuden, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| f \circ h^{\circ k} \right\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|f\|_1 = \|f\|_1 \left(\frac{1}{1 - C} - 1 \right) < \infty.$$

Da funktionsrummet $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ er fuldstændigt jf. FR sætning 1.19 og et reelt vektorrum jf. FR sætning 1.6. $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ har seminormen $\| \cdot \|_1$, og jf. FR sætning 1.17 er enhver række $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ med led fra $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, hvorom der gælder, at $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, konvergent i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$.

Betragt derfor følgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – denne er konvergent i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, hvis og kun hvis rækken $\sum_{k=1}^{\infty} f \circ h^{\circ k}$ er konvergent. Men da vi jo fandt, at $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| f \circ h^{\circ k} \right\|_1 < \infty$ ovenfor, følger af ovenstående, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} f \circ h^{\circ k}$ er konvergent, og at $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer mod en funktion g i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, hvor

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} f \circ h^{\circ k}.$$

Q3.3

I dette og følgende spørgsmål illustreres resultaterne fra Q3.1 og Q3.2 med et eksempel. Vi definerer

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m + 2^{-m}]}(x)$$

og $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(2^k x)$ for $x \in \mathbb{R}$.

Vi skal vise, at $f, f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi ser, at

$$\begin{aligned}
\int |f| \mathrm{d}m &= \int \left| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\overset{6.11}{\leq} \int \sum_{m=1}^{\infty} \left| (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \right| \mathrm{d}x \\
&= \int \sum_{m=1}^{\infty} 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \mathrm{d}x \\
&\overset{6.20}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \int 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \mathrm{d}x \overset{6.19}{=} \sum_{m=1}^{\infty} m([2^m, 2^m + 2^{-m}]) \\
&\overset{2.16}{=} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1 < \infty,
\end{aligned}$$

hvor vi bruger ved 6.20, at indikatorfunktioner er $\mathcal{M}^+$ (henvisningerne ovenfor er til EH).

Ved ulighedstegnet (som faktisk er et lighedstegn), benyttes, at funktionen $x \mapsto (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x)$ er målelig (jf. EH opgave 4.11(b)) og dermed $\mathcal{M}$ for alle $m \in \mathbb{N}$. Vi har derfor jf. EH lemma 5.3, at $x \mapsto \sum_{m=1}^{n} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x)$ er $\mathcal{M}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvorpå EH lemma 5.2 og 5.8 giver, at $x \mapsto |\sum_{m=1}^{n} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x)|$ er $\mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og slutteligt fås, at $x \mapsto |\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x)|$ er $\mathcal{M}^+$ jf. EH sætning 5.12.

Vi får desuden også jf. EH lemma 5.2, 5.8 og 5.9, at $x \mapsto \sum_{m=1}^{n} |(-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x)|$ er $\mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvorpå EH sætning 5.12 giver, at $x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} |(-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x)|$.

Selve uligheden skyldes, at vi har for $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$, jf. trekantsuligheden, at

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=1}^{n} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \right| &\leq \sum_{m=1}^{n} \left| (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| (-1)^m 1_{[2^m, 2^m+2^{-m}]}(x) \right|,
\end{aligned}$$

hvorpå vi ved at lade $n \to \infty$ opnår det ønskede. Altså er $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, og $\|f\|_1 \leq 1$.

Vi definerer nu $h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $h_0(x) = 2x$. Det er klart, at h_0 er kontinuert og dermed Borel-målelig jf. EH lemma 4.8. h_0 er også bijektiv, med invers funktion $h_0^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$, hvorpå vi ser, at $(h_0^{-1})'(y) = \frac{1}{2}$ (eller $\leq$) for alle $y \in \mathbb{R}$. Sætter vi $C_0 = \frac{1}{2}$, er $C_0 \in [0, 1)$. Vi har dermed, at h_0 opfylder alt, hvad h opfyldte pr. antagelser.

Vi definerer nu igen rekursivt $h_0^{\circ n} = h_0 \circ h_0^{\circ(n-1)}$ og $h_0^{\circ 1} = h$. Vi viser ved induktion, at $h_0^{\circ k}(x) = 2^k x$ for alle $x \in \mathbb{R}$: induktionsstarten er klar. Under antagelse af, at $h_0^{\circ k}(x) = 2^k x$, findes, at

$$h_0^{\circ(k+1)}(x) = (h_0 \circ h_0^{\circ k})(x) = (h_0^{\circ k} \circ h_0)(x) = 2^k h(x) = 2^{k+1} x$$

for $x \in \mathbb{R}$. Dermed har vi, hvad vi ønskede at vise.

Vi har nu, at $f_n(x) = \sum_{k=1}^n f(2^k x) = \sum_{k=1}^n f(h_0^{\circ k}(x)) = \sum_{k=1}^n f \circ h_0^{\circ k}(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da er f_n altså netop på formen som f_n fra Q3.2, idet vi netop har fundet, at $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$. Vores viden fra Q3.2 giver os nu, at $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, og at $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$. Pr. FR s. 10 ved vi altså, at der findes en funktion $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, så

$$\|f_n - g\|_1 \to 0$$

for $n \to \infty$. Denne grænsefunktion g angives naturligvis stadig ved $g = \sum_{k=1}^\infty f \circ h_0^{\circ k}$.

Q3.4

Idet g angiver grænsefunktionen fra Q3.3, skal vi vise, at $\|g\|_1 \leq 1$. Bemærk, at vi kan opskrive seminormen således, idet vi jo fandt, at f_n konvergerede i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, hvorpå grænsefunktionen g selv må ligge i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$.

Vi har, at

$$\begin{aligned} \|g\|_1 &= \int |g| \mathrm{d}m = \int \left| \sum_{k=1}^\infty f \circ h_0^{\circ k} \right| \mathrm{d}m \overset{6.11}{\leq} \int \sum_{k=1}^\infty \left| f \circ h_0^{\circ k} \right| \mathrm{d}m \\ &\overset{6.20}{=} \sum_{k=1}^\infty \int \left| f \circ h_0^{\circ k} \right| \mathrm{d}m = \sum_{k=1}^\infty \left\| f \circ h_0^{\circ k} \right\|_1, \end{aligned}$$

hvor vi ved henvisningen til EH sætning 6.20 benyttede, at $h_0^{\circ k}(x) = 2^k x$ er kontinuert og dermed målelig jf. EH lemma 4.8, hvorpå EH lemma 4.5 giver, at $f \circ h_0^{\circ k}$ er målelig, og $|f \circ h_0^{\circ k}|$ er derpå $\mathcal{M}^+$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Ulighedstegnet ovenfor følger af, at funktionen $f \circ h_0^{\circ k}$ er målelig og dermed $\mathcal{M}$ for alle $m \in \mathbb{N}$. Vi har derfor jf. EH lemma 5.3, at $\sum_{k=1}^n f \circ h_0^{\circ k}$ er $\mathcal{M}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvorpå EH lemma 5.2 og 5.8 giver, at $|\sum_{k=1}^n f \circ h_0^{\circ k}|$ er $\mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og slutteligt fås, at $|\sum_{k=1}^\infty f \circ h_0^{\circ k}|$ er $\mathcal{M}^+$ jf. EH sætning 5.12. Vi får desuden jf. EH lemma 5.2, 5.8 og 5.9, at $\sum_{k=1}^n |f \circ h_0^{\circ k}|$ er $\mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}$, vi får fra EH sætning 5.12, at $\sum_{k=1}^\infty |f \circ h_0^{\circ k}|$ er $\mathcal{M}^+$.

Ulighedstegnet følger af EH sætning 6.11 grundet trekantsuligheden, idet $|\sum_{k=1}^n f \circ h_0^{\circ k}| \leq \sum_{k=1}^n |f \circ h_0^{\circ k}| \leq \sum_{k=1}^\infty |f \circ h_0^{\circ k}|$, hvorpå vi lader $n \to \infty$.

Idet vi jo havde, at h_0 opfyldte antagelserne for h, og da $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, får vi pr. resultaterne i Q3.2, at $\|f \circ h_0^{\circ k}\|_1 \leq \|f\|_1 C_0^k$ for alle $k \in \mathbb{N}$, og

$$\|g\|_1 \leq \sum_{k=1}^\infty \|f\|_1 C_0^k = \|f\|_1 \left(\frac{1}{1 - C_0} - 1 \right) = \|f\|_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) \leq 1,$$

idet $(h_0^{-1})'(y) \leq C_0 = \frac{1}{2}$ for alle $y \in \mathbb{R}$, hvorpå rækken efter første ulighedstegn er konvergent. Sidste ulighedstegn indses gennem Q3.3; vi fandt, at $\|f\| \leq 1$. Derpå er $\|g\| \leq 1$.

Det skal vises, at f_n konvergerer punktvis mod g for m-næsten alle $x \in \mathbb{R}$, og afgøres, om den konvergerer punktvis for alle $x \in \mathbb{R}$.

Det første følger af bemærkningen FR s. 17; rækken $\sum_{k=1}^{\infty} f \circ h_0^{\circ k}$ med led fra $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ (hvilket blev vist generelt i Q3.2), som opfylder, at $\sum_{k=1}^{\infty} \|f \circ h_0^{\circ k}\|_1 \leq 1 < \infty$, konvergerer punktvis for m-næsten alle $x \in \mathbb{R}$, og dette netop mod grænsefunktionen i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, som jo var g.

Den konvergerer dog ikke for alle $x \in \mathbb{R}$. Betragt nemlig tilfældet $x = 1$; da er

$$f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} f(2^k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 1_{[2^m, 2^m + 2^{-m}]}(2^k),$$

og det eneste led i den inderste række, for hvilket indikatorfunktionen ikke er lig 0, er netop det for $m = k$, thi $[2^m, 2^m + 2^{-m}] \cap [2^n, 2^n + 2^{-n}] = \emptyset$ for $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, hvorpå vi får, at

$$f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 1_{[2^k, 2^k + 2^{-k}]}(2^k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k,$$

og vi ser med divergenskriteriet Kalkulus sætning 12.1.4, at f_n ikke konvergerer for $x = 1$, thi grænseværdien for $(-1)^k$ for $k \to \infty$ ikke eksisterer.