Den matematiske grundlagskrise

12. januar 2010

Asger Haugstrup

Helene Juncher

Søren Frejstrup Grav Petersen

Mikkel Nichlas Rauf

Rasmus Sylvester Bryder

Indhold

1 Problemformulering

MATEMATIK er i høj grad et redskab til forståelse og udvikling af verden omkring os. Den er blevet et nødvendigt middel for at forklare og forudsige videnskabelige fænomener. Der hersker ingen tvivl om, at matematikken er noget enestående, men som ved enhver anden ting kræver den en forklaring. For hvad er matematik helt præcist? Umiddelbart er det ikke noget fysisk, for når vi anvender matematik, foregår det oppe i vore tanker. Men hvis det kun er tankeprocesser, hvordan kan det så benyttes i naturvidenskaben? Og hvordan kan matematikken være så præcis og give så mange svar, hvis det blot er noget mennesket har skabt?

Vi ønsker med denne opgave at gøre rede for de begivenheder, der førte til matematikkens grundlagskrise. Ud fra et historisk synspunkt ønsker vi da at redegøre for og vurdere de 3 grundlagsskoler der opstod som svar på grundlagskrisen, dvs. formalismen, intuitionismen og logicismen. Ud fra disse grundlagsskoler vil vi redegøre for, hvordan det matematiske samfund kom ud af denne krise, og hvorvidt det lykkedes at finde et sikkert fundament for matematikken.

2 Indledning

EN af de tidligste filosoffer, der gjorde sig tanker om matematikken, var Platon. Han mente, at der eksisterer to verdener: fænomenverdnen og ideverdnen. Fænomenverdenen er den verden, vi befinder os i. Den er i konstant bevægelse og forandrer sig dermed hele tiden. Ideverdenen derimod er en stillestående uforanderlig verden, der består af rene perfekte objekter og strukturer. Hver objekt i vores verden er en uperfekt spejling af objekterne i ideverdenen.

Platon mente, at ens sjæl befinder sig i denne ideverden før fødslen, og at man efter fødslen vil have glemt alt hvad man har set. Specielt matematikken, mente han, eksisterer i denne ideverden og når mennesker forsker i matematik erindrer de i virkeligheden det, som deres sjæl har observeret i ideverdnen før fødslen. Han mente altså at matematikken må eksistere uafhængigt af mennesket.

Platonismen giver de nødvendige svar på spørgsmålene omkring matematikken, men det kan diskuteres, om matematikkens problemer i virkeligheden ikke bare flyttes til en anden verden, som mennesket ikke skal kunne forstå. I stedet for at forklare, hvorfor matematikkens system er, som det er, bliver man henvist til ideverdenen. Men dette giver blot anledning til nye spørgsmål. Hvad er ideverdenen og hvor befinder den sig? Det er de færreste matematikere i det 21. århundrede, som kan tro på, at der faktisk eksisterer en verden foruden vor egen, som indeholder alle sandheder og som ens sjæl har befundet sig i.

Tanken om en ideverden var dog meget mere accepteret tidligere, da religion havde en større indflydelse. Troen på en ideverden gjorde det nemlig muligt at have en videnskabelig udvikling, uden at der skete et splid mellem videnskab og religion. Men naturligvis vil en ægte videnskabsmand på et tidspunkt have behov for en mere jordnær forklaring af bl.a. matematikken.

I 1800-tallet gav John Stuart Mill dette. Mill mente, at matematikken byggede på en induktiv videnskab. Vores aksiomer og grundideer bygger på vores observeringer af verdenen omkring os. Aritmetikken er blevet defineret ved at tilføje/fjerne objekter fra en mængde, og geometrien er blevet afledt af forskellige geometriske objekter, man har betragtet. Mill mente altså, at den grundlæggende matematik var skabt ud fra vores sanseerfaringer og at der først derefter foregik en deduktiv proces til at udvide denne matematik. Af disse grunde mente han, at matematikken måtte være aposteriorisk, syntetisk viden.

Der var dog flere meninger om dette. Nogle år senere kom Immanuel Kant med en ny fortolkning af matematikken. Kant mente, at matematik måtte være a priori, syntetisk viden. Kants argument var, at fx inde for geometrien var det nødvendigt at konstruere et geometrisk objekt og undersøge objektet for at afgøre, om en given sætning var sand eller falsk. Fordi objektet skulle konstrueres, måtte geometrien dermed være syntetisk. Det falder da en naturligt at tro, at matematikken dermed må være a posteriori, men Kant var ikke af den holdning. Han mente, at det er umuligt at betragte verden i sig selv. Alt, hvad vi erfarer, sker gennem vores sanser, og derfor kan vi ikke se verden objektivt, da vi er bundet af disse sanser. Med hensyn til geometrien mente han derfor, at det var en undersøgelse af vores måde at opfatte verden på, og dermed en undersøgelse af os selv. Dette måtte betyde, at matematikken var a priori.

Det var i det gamle Grækenland, at man kom frem til nødvendigheden af aksiomer. Et bevis for en sætning må kræve, at man reducerer sætningen til en allerede kendt sætning. Men også denne sætning må have et bevis, hvor det er reduceret til noget, der vides at være sandt. Det er klart, at dette ville blive en uendelig følge, hvis ikke man accepterer, at der eksisterer nogle selvindlysende sande sætninger – aksiomer. Dette var altså første gang, i kendt historie, at matematikken fik en så streng struktur. Et af de mest kendte eksempler på dette er Euklids Elementer. Værket består af 13 bøger og er nok mest kendt for dets grundighed. Værket starter med en række aksiomer, hvorefter en række sætninger bliver bevist ved hjælp af disse aksiomer.

I lang tid var Euklids Elementer blevet anset for at være en fuldstændig beskrivelse af geometrien. Dog har der været en vis tvivl angående Euklids femte postulat, også kaldet parallelpostulatet, som flere gange i løbet af matematikkens historie, er forsøgt bevist ud fra de resterende aksiomer uden held. Parallelpostulatet er ækvivalent med, at vinkelsummen af alle trekanter er ens.

Allerede i Euklids tid tydede det på, at Euklid prøvede at bevise dette postulat ud fra de resterende aksiomer. Da dette ikke syntes muligt, endte han med at angive det som et postulat. Sidenhen har flere matematikere forsøgt at bevise postulatet, men i 1800-tallet kom man frem til at postulatet ikke nødvendigvis var sandt. Dette overraskende resultat fik flere matematikere til at studere andre geometriske rum, hvor parallelpostulatet ikke var sandt, altså ikke-euklidiske rum.

Opdagelsen af ikke-euklidisk geometri samt en del andre overraskende resultater var med til at ryste tilliden til matematikken. Noget, man i flere årtusinder havde anset for sandt, blev pludseligt uafgørbart. Dette resulterede i et ønske om, at matematikken fik et mere håndfast grundlag, hvor man ungik usikre beskrivelser af rum og bevægelse. Man begyndte derfor at beskrive matematikken ved hjælp af mængder. Et eksempel på denne ændring er Cauchy-Weierstrass-definitionen frem for den tidligere løse definition af kontinuitet. Man stødte dog på et problem. Begrebet mængde var defineret så frit, at det var muligt at danne paradoksale mængder. Det mest kendte eksempel på dette er mængden $M = \{A \mid A \notin A\}$, hvor det ikke kan afgøres om, M er element i sig selv eller ej (hvilket vi kommer nærmere ind på senere). Disse paradokser fik mange matematikere til at indse, at det daværende grundlag for matematikken var alt for mangelfuldt. Som respons til manglen på et ordentligt grundlag blev der oprettet flere grundlagsskoler, heriblandt intuitionisme og formalisme, med formålet at skabe et velfungerende grundlag. Logicismen var imidlertid det mest umiddelbare svar på problemet, og var grundlæggende bare en modifikation af Freges mængdelæreteori. Vi vil i det følgende uddybe Freges teori, og beskrive de idéer der ledte til Russells paradoks, og hvad dette medførte.

3 Logicisme

GOTTLOB Freges ide var at udvikle logikken på en sådan måde, at den kunne udgøre et grundlag for aritmetikken. I et brev til David Hilbert fremgår det dog, at han ikke mener, det er muligt at fundere geometrien på det samme grundlag, da denne efter hans mening bygger på en rumanskuelse i modsætning til aritmetikken, som primært er bygget over en tidsanskuelse. På dette punkt er han altså på linje med Kant.

Logicismen forbindes dog med forsøget på at grundlægge hele matematikken på logiske aksiomer, hvilket også var Bertrand Russells mål. I logicismen er opfattelsen den, at logikken ikke blot behøver at optræde parallelt til matematikken, men at disse i en vis forstand kan smelte sammen:

> Mathematics and logic, historically speaking, have been entirely distinct studies... But both have devoloped in modern times: logic has become more mathematical and mathematics has become more logical. The consequenquence is that it has now become wholly impossible to draw a line between the two; in fact the two are one... The proof of their identity is, of course, a matter of detail.
>
> (Shapiro, 2000, s. 107)

Boole udviklede logikken ved brug af matematikken, men Gottlob Frege videreudvikler logikken på en sådan måde, at den kan udgøre et grundlag for matematikken.[1]

Et væsentligt punkt ved Gottlob Freges arbejde er hans måde at definere talbegrebet på. Han viser, hvordan de naturlige tal kan defineres logisk ud fra begrebsekstensioner. Ekstensionen af et begreb er klassen af alle de objekter, som passer til begrebet. I "Thinking About Mathematics" nævnes som et eksempel begrebet "stol" som er klassen af alle stole.[2] For de naturlige tals vedkommende benyttes i stedet begrebet "ligetallig med". Frege bruger et velkendt tælleprincip: Han opfatter begrebet F som ligetallig med G, hvis der kan etableres en bijektiv korrespondance mellem objekterne tilhørende F og objekterne tilhørende G. Gottlob Frege foreslog følgende tese (også kendt som Humes princip):

> For vilkårlige begreber F og G gælder, at antallet af F er identisk med antallet af G, hvis og kun hvis F og G er ligetallige.

[1] "Ud over matematikken", Ole Skovsmose, s. 33
[2] Freges ord for 'mængde' var 'klasse'.

Frege definerer de naturlige tal ved begreber og deres ekstensioner: Antallet tilhørende begrebet F er ekstensionen af begrebet ligetallig med begrebet F. Som et eksempel kan nævnes tallet 0, som Frege identificerer med antallet af begrebet "ikke identisk med sig selv". Da alle begreber er identiske med sig selv, bliver antallet tilknyttet dette begreb til nul.

Frege går videre med at definere efterfølgerrelationen, i hvilken n efterfølger m, hvis der eksisterer et begreb som passer til netop n objekter, og når der fjernes én, er der netop m objekter tilbage. Frege får desuden vist induktionsprincippet, samt at der findes uendelig mange naturlige tal.

Ved på denne måde at vise, at aritmetiske påstande kan påvises ud fra logiske love, forsøger Frege at lægge matematikken på et analytisk og a priori grundlag. Dette er Freges logicistiske projekt.[3]

3.1 Russells paradoks

Mens det andet bind af "Grundgesetze der Arithmetik" var i trykken, modtog Frege et brev fra Bertrand Russell. I brevet gjorde Russell Frege opmærksom på, at den frie mængdedannelse, som er fundamental i Freges bog, giver anledning til inkonsistens. Fra Freges måde at danne begrebsekstensioner på, kunne et begreb F tilknyttes en ekstension $Ext(F)$ på følgende måde:

$$Ext(F) = \{a \mid F(a)\}$$

Denne måde at danne mængder på fører dog til et system med iboende selvmodsigelser. Man kan forestille sig en mængde M, defineret som mængden af alle de mængder der ikke er element i sig selv, dvs.

$$M = \{A \mid A \notin A\}$$

Man kan så stille spørgsmålet: Er M element i sig selv? Fra definitionen på M fås, at hvis M er element i sig selv, kan M ikke være element i sig selv, og hvis M ikke er element i sig selv, så må M være element i sig selv, altså $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$. En åbenlys selvmodsigelse.[4]

Da Frege modtog brevet, indså han straks, at den måde, han havde valgt at lade mængder frit defineres ved begrebsekstensioner på, ikke fungerede, og efter et stykke tid droppede han sit logicistiske projekt. Det blev dog videreført af Russell selv.

Russell arbejdede altså videre med problemet, og hans løsning på paradokset var at begrænse den frie mængdedannelse ved at påføre et krav om hierarki. Dette kaldes for Russells typeteori. De restriktioner, Russell satte op omkring mængdelæren, var, at en mængde ikke kunne indeholde elementer af samme type som mængden selv.

Hierarkiet blev konstrueret ud fra typer, og bunden i dette var type 0, som bestod af individer, der ikke var mængder. Type 1 bestod af mængder af individer af type 0, og helt generelt kan man sige, at type n bestod af mængder af elementer af type $n-1$. På denne måde undgås derfor mængder som den i Russells paradoks definerede.

[3]"Thinking About Mathematics", Stewart Shapiro, s. 109-112

[4]"Ud over matematikken", Ole Skovsmose, s. 34-35. I en populær udgave er dette paradoks formuleret som: "En barber barberer alle i byen der ikke barberer sig selv". Her er spørgsmålet så: Hvem barberer barberen?

For eksempel kan tallet “5” så defineres på følgende måde:

Type 0:	$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$
Type 1:	$\{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\}$
Type 2:	“5”

(Alle type 1-klasser der er ligetallige med $\{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\}$)

3.2 Principia Mathematica

I “Principia Mathematica” er det Russell og Whiteheads mål at definere matematiske begreber ud fra logiske begreber og at lave en deduktion af matematikkens teoremer ud fra logiske tautologier. Centralt var talbegrebet som blev defineret ved begrebsekstensioner på samme måde som Gottlob Frege havde gjort det.

I Bertrand Russell og Alfred North Whiteheads værk opsattes 5 logiske tautologier, som skulle udgøre et aksiomatisk grundlag for aritmetikken. De 5 tautologier var

1. $(p \vee p) \Rightarrow p$
2. $q \Rightarrow (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
4. $(p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$[5]
5. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r))$[6]

Det var dog ikke muligt udelukkende at fundere matematikken på aksiomer svarende til sådanne tautologier, så Russell og Whitehead var tvunget til at indføre nogle flere aksiomer, der ikke var tautologier.

3.3 Problemer og kompromisser i logicismen

Russell og Whitehead måtte indføre yderligere 3 aksiomer: reducibilitetaksiomet, uendelighedsaksiomet og udvalgsaksiomet.

Freges bevis for, at der findes uendeligt mange naturlige tal, var ikke kompatibelt med de typerestriktioner, som Russell havde indført. For at kunne arbejde med uendelighed, var det derfor nødvendigt at antage, at der fandtes uendelig mange type 0 individer. Uendelighedsaksiomet tages med, da det ser ud til at være nødvendigt for aritmetikken. Om det så er analytisk eller a priori, kan diskuteres. Under alle omstændigheder blev Russell her nødt til blot at antage, hvad der i Freges system (indeholdende den fejlagtige grundlæggende 5. lov om fri mængdedannelse) var blevet påvist.

Spørgsmålet er vel også, om det overhovedet kan være muligt ud fra ren begrebsanalyse at komme frem til et postulat om eksistens af uendeligt mange objekter.[7]

Desuden måtte de også benytte sig af udvalgsaksiomet, som heller ikke er en logisk tautologi, og i dag er det et forholdsvist omdiskuteret 9. aksiom i ZFC, som vi kommer ind på senere. Aksiomet er formuleret af Ernst Zermelo i 1904, og lyder som følger:

[5] Det viste sig senere, at tautologi (4) var unødvendig, da det i 1926 blev påvist af P. Bernays, at denne følger af de fire andre.

[6] "Ud over matematikken", Ole Skovsmose, s. 35-37

[7] "Thinking About Mathematics", Stewart Shapiro, s. 113

> Lad T være en mængde af ikke-tomme, disjunkte mængder $A, B, C, \ldots$ Da er det altid muligt at vælge netop ét element $a, b, c, \ldots$ fra hver af elementerne i T og at kombinere disse til en ny mængde S.

Freges bevis for induktionsprincippet ser heller ikke ud til at kunne bruges i Russells system, og som svar på denne vanskelighed, må Russell og Whitehead ydermere indføre et aksiom kaldet reducibilitetsprincippet. Dette gøres for at sikre sig, at man kan ignorere det komplicerede klassehierarki, der var opbygget. Reducibilitetsaksiomet siger følgende:

> For hver type gælder for enhver klasse c, at der findes en (prædikativ) type 0 klasse c' som indeholder de samme elementer som c.
>
> (Shapiro, 2000, s. 120)

Aksiomet sikrer, at vi udelukkende behøver at se på de naturlige tal som type 2-klasser, og det gør det muligt for Russell og Whitehead at gå videre med at udlede de grundlæggende principper i aritmetikken. Reducibilitetsprincippet blev stærkt kritiseret for at være et ad hoc indført ikke-logisk aksiom, og Bertrand Russell erkendte også svagheden ved det og indrømmede, at den udgjorde en fejl i hans logicisme. Aksiomet blev simpelthen indført som et nødvendigt postulat. I forsøget på at redde den kendte matematik, blev det altså nødvendigt for Russell og Whitehead at indføre flere forskellige aksiomer, der ikke er funderet i logikken, hvilket jo måtte siges at kompromittere selve den logicistiske idé.[8]

3.4 Logicismens betydning i dag

Logicismen har haft indflydelse på videnskabsfilosofien, på matematiske formuleringer og på matematikpædagogikken. Som eksempel nævner Skovsmose i "Ud over Matematikken", at det er blevet en sædvane i matematikken at definere begreber ekstensionelt, som f.eks. når de rationale tal bliver defineret som en ækvivalensrelation mellem talpar. Desuden nævnes ideen om, at matematik kan formuleres i et mængdelæresprog.[9]

Der findes også i dag matematikfilosoffer, hvis tilgang til matematikken er præget af logicismens ideer. Ifølge Shapiro er en sådan neo-logicist kendetegnet ved at fastholde 2 synspunkter: *(i)* en væsentlig del af matematikkens sandheder erkendes a priori, ved at aflede disse fra regler, som er analytiske eller meningsbestemmende; *(ii)* denne matematik angår en ideel sfære for objekter, som er objektive og bevidsthedsuafhængige i en vis forstand (på samme måde som Frege).[10]

3.5 Vurdering af logicismen

Frege, Russell og Whiteheads forsøg på at forankre matematikken i logikken på et analytisk og a priori grundlag må vel siges at være slået fejl. Da Russell med sit paradoks påviste, at Gottlob Freges grundlæggende 5. lov førte til inkonsistens, indså Frege at han ikke kunne gennemføre det, han var begyndt på. Efterfølgende forsøgte Russell at arbejde videre med ideerne med de restriktioner, han

[8]"Thinking About Mathematics", Stewart Shapiro, s. 117-120
[9]"Ud over matematikken", Ole Skovsmose, s. 36-38
[10]"Thinking About Mathematics", Stewart Shapiro, s. 133

havde tilføjet. Disse restriktioner viste sig dog at skabe nye problemer, og derfor var Russell og Whiteheads logicistiske projekt nærmest dødfødt fra starten. Logicismens fundamentale ide – at ville grundlægge matematikken på tautologier – kunne ikke helt lade sig gøre med de nye typebegrænsninger, og det var nødvendigt for Russell og Whitehead, at indføre 3 mere eller mindre problematiske aksiomer der ikke var tautologier. Især virker indførslen af reducibilitetsprincippet mest af alt som et forsøg på at postulere sig ud af de problemer, som typeteorien medførte. Uendelighedsprincippet og udvalgsaksiomet var heller ikke funderet i logik, og var derfor også problematiske for logicismen. Efterfølgende måtte Russell da også erkende, at hans forsøg på at finde sikker viden i matematikken var mislykkedes. Man kan vel sige, at Russell og Whitehead i kraft af deres ad hoc indførte aksiomer gik så meget på kompromis med den grundlæggende idé, at resultatet af deres arbejde ikke blev at reducere matematik til logik, men måske snarere det modsatte; at man indså, at matematikken næppe udelukkende kunne grundlægges på logik.

4 Intuitionisme

IDET mange af datidens matematikere altså ikke mente, at det logicistiske udgangspunkt for matematikken var fyldestgørende, opstod en ny grundlagsskole, nemlig intuitionismen. Det var primært den hollandske matematiker Luitzen E. J. Brouwer (1881 - 1966), der optegnede den intuitionistiske skole, og vi vil i denne opgave tage udgangspunkt i hans udgave af intuitionismen.

Ud fra de mange kontraintuitive matematiske opdagelser og paradokser opdaget i det 19. århundrede, følte Brouwer, at disse var i modstrid med den klassiske matematik, og at løsningen på disse matematiske problemer var at opbygge matematikken fra bunden af igen, men ud fra mere "korrekte" antagelser og derved undgå de førnævnte problemer. Brouwer mente altså ikke, at det var intuitionismens hensigt at forklare og reparere matematiske paradokser og andre kontraintuitive opdagelser i matematikken, men derimod at konstruere et nyt fundament for matematikken, hvorved disse helt undgås.

Brouwer tog grundlæggende udgangspunkt i Immanuel Kants matematikfilosofi, men hvor Kant mente, at matematikken var en beskrivelse af både den rumlige og den tidslige anskuelse af verdenen, mente Brouwer, at matematikken skulle tage udgangspunkt udelukkende i den tidslige anskuelsesform. Brouwer var altså ligesom Kant konstruktivist, og mente altså at matematikken var intuitive, konkrete, mentale konstruktioner, der kan opbygges ud fra vores anskuelse af tiden, og på denne måde afviser han altså, at matematikken kan findes på et metafysisk plan, hvilket er en fælles holdning for alle intuitionister. Intuitionisterne mener, at anskuelsen af tid giver de naturlige tal, og hvorfra man ud fra en rationalistisk metode kan konstruere de rationale tal og herfra de reelle tal.

Intuitionismens svar på den matematiske grundlagskrise, er altså at matematikken er reel, hvis den kan konstrueres mentalt, og intuitionisterne er altså ontologiske antirealister, idet de ikke mener, at matematiske entiteter kan eksistere uafhængigt af vores bevidsthed, da de er et udtryk af en mental konstruktion.

På dette punkt udfordrede intuitionismen de andre grundlagsskoler. Ud fra dette synspunkt eksisterer matematiske sætninger ikke før vi har beskrevet dem, og de har derfor ingen sandhedsværdi, før de er blevet beskrevet af os. Problemstillingen, som Brouwer satte op, indbefatter Goldbachs formodning, som siger, at ethvert lige tal større end 2, kan skrives som en sum af to primtal. Idet Goldbachs formodning endnu ikke er påvist korrekt eller ukorrekt, har den ifølge intuitionisterne ikke nogen reel sandhedsværdi. Brouwer opsatte ud fra dette følgende eksempel:

$$p = \begin{cases} 3, & \text{hvis Goldbachs formodning er sand} \\ 5, & \text{hvis Goldbachs formodning er falsk} \end{cases}$$

Brouwers problem går nu ud på at vurdere hvorvidt p er et primtal eller ej. Da både 3 og 5 er primtal, virker det umiddelbart oplagt, at p er et primtal uanset udfaldet af Goldbachs formodning, men ud fra intuitionisternes ontologiske position, som gør, at det ikke er muligt at tilegne Goldbachs formodning en sandhedsværdi, vil det ikke være muligt at afgøre hvorvidt $p = 3$ eller $p = 5$, og dermed kan vi altså ikke afgøre hvorvidt p er et primtal eller ej, idet p slet ikke er veldefineret. Kigger man derimod fra det andet ontologiske synspunkt, nemlig den ontologiske realisme, vil Goldbachs formodning have en sandhedsværdi uafhængigt af os, og vi kan derfor afgøre, at p vil være et primtal, selvom vi ikke ved hvilket. Men dette resultat hænger på, at vi er semantiske realister, hvilket er et problem inden for logicismen og formalismen, hvor man primært er ontologiske antirealister, og dermed også semantiske antirealister, idet hvis man er ontologisk antirealist ikke mener at verden eksisterer uafhængigt af os, og på den måde også mener at sætninger om verden kun eksisterer i form af vores bevidsthed om dem.

Opgiver man derfor den semantiske realisme, påpeger Brouwer, at man bliver nødt til at opgive visse fundamentale logiske påstande og principper. Specielt bliver man nødt til at opgive det såkaldte udelukkede tredjes princip. Det udelukkede tredjes princip omhandler grundprincippet, om at enhver påstand enten er sand eller falsk, og at en tredje sandhedsværdi (f.eks. uafgørbarhed) ikke forekommer (heraf navnet). Denne teori skaber problemer, idet man tilføjer påstanden en sandhedsværdi, man ud fra et semantisk antirealistisk synspunkt ikke reelt har nogen viden om, og på den måde antager man altså en viden, man umuligt kan have med mindre man er alvidende. Endvidere giver dette problemer ud fra et konstruktivistisk synspunkt, idet konstruktion af beviser ofte hænger på det udelukkede tredjes princip.

4.1 Intuitionistisk logik

Ovenstående problemstilling kan konkretiseres ud fra følgende skema, som beskriver den intuitionistiske logik:

$\vee$ (eller)	For at bevise $p \vee q$ skal vi enten have bevist p eller q
$\wedge$ (og)	For at bevise $p \wedge q$ skal vi vise både p og q
$\Rightarrow$ (medfører)	For at bevise $p \Rightarrow q$ skal vi lave en algoritme, som fører et bevis for p over i et bevis for q
$\neg$ (negation)	For at bevise $\neg p$ skal vi bevise at p medfører $0 = 1$
$\exists$ (eksistens)	For at bevise $\exists x p(x)$ skal vi konstruere et x så $p(x)$ gælder
$\forall$ (for alle)	For at bevise $\forall x p(x)$ skal vi lave en algoritme, som brugt på et arbitrært x beviser at $p(x)$ gælder

Ud fra første eksempel med $\vee$-begrebet, vil en klassisk matematiker umiddelbart mene det samme som en intuitionist, men sættes $q = \neg p$ opstår et problem. En klassisk matematiker vil mene at $p \vee \neg p$ er en tautologi uafhængigt af p, hvorimod en intuitionistisk matematiker vil holde fast i skemaets karakterisering af $\vee$ og derved vedholde, at enten p eller $\neg p$ skal bevises før $p \vee \neg p$ gælder. Til dette skal bemærkes, at der er en forskel på hvordan en klassisk matematiker og en intuitionistisk matematiker fortolker en negation ($\neg$). En klassisk matematiker vil mene, at der ud fra negationen af en påstand ændres sandhedsværdi fra sand til falsk (eller omvendt), mens en intuitionistisk matematiker vil mene, at en negation af en påstand p er sand (dvs. $\neg p$ gælder) betyder, at der findes et bevis for, at der ikke findes noget bevis for påstanden (altså et bevis for, at der ikke findes et bevis for at p gælder).

Ligeledes vil en klassisk matematiker også antage, at udtrykket $\exists x p(x)$ er ækvivalent med $\neg \forall x \neg p(x)$. Dette er også et problem inden for den intuitionistiske logik, idet man her benytter det udelukkede tredjes princip, som man jo netop har valgt at forkaste i intuitionismen. Vælger man, for at bevise $\neg \forall x \neg p(x)$, i stedet at bevise $\exists x p(x)$, fører dette til en problemstilling, hvor vi bliver nødt til at gå på kompromis med hensyn til beregnelighed, og dette er naturligvis ikke en speciel holdbar løsning når man nu søger efter et sikkert grundlag for matematikken.

Et tredje eksempel på den intuitioniske brug af logiske termer ses ved, at man ud fra den intuitionistiske logik kan slutte $p \Rightarrow \neg(\neg p)$, men ikke omvendt $\neg(\neg p) \Rightarrow p$. Dette ses tydeligt, idet vi går ud fra det konstruktivistiske udgangspunkt. Antager vi, at vi har bevist at $p(x)$ gælder, har vi altså konstrueret et bevis ud fra et bestemt x. Dette x kan vi nu benytte til at vise, at der i hvert fald gælder $\neg(\neg p(x))$, da $p(x)$ er tilegnet en sandhedsværdi (nemlig at $p(x)$ er sandt). Antages omvendt, at vi har bevist $\neg(\neg p(x))$, gælder der ikke, at $p(x)$ ikke er sand for det bestemte x. Tager vi nu her det udelukkede tredjes princip i brug, kan vi altså ikke konkludere at $p(x)$ gælder, idet den tredje mulighed, nemlig at p er uafgørbar i forhold til sin sandhedsværdi, ikke kan udelukkes. Dette betyder altså, at vi ikke kan konstruere et x, så vi ud fra $\neg(\neg p(x))$ kan konkludere at $p(x)$ gælder, hvilket jo er intuitionistens krav for eksistens.

4.2 Kritik af intuitionismen

Går vi nu tilbage til udgangspunktet, nemlig Brouwers konstruktivistiske synspunkt på matematikken, er det klart, at metoden hvorpå konstruktionen af beviserne for de matematiske entiter er afgørende for Brouwer. Intuitionisterne søger altså efter en “korrekt” konstruktivistisk fremgangsmetode, som kan følges overalt i matematikken. Men samtidig har Brouwer også den holdning, at matematikken er en mental konstruktion. Når han nu netop fremsiger denne påstand konkluderer han, at matematikken er subjektiv for alle matematikere, idet to matematikere aldrig kan være helt sikre på, at deres mentale konstruktion af en matematisk entitet vil svare overens, da disse ikke er sammenlignelige. Intuitionisterne mister altså en vis objektivitet hvad angår nøjagtigheden af matematikken.

Dette eksemplificeres specielt ved Wittgensteins bille. Wittgenstein opsatte følgende problemstilling: Lader man alle individerne i et folkefærd have en eksklusiv lukket kasse hver, sådan at hvert individ kun kan kigge i sin egen kasse, og kalder indholdet af kasserne for en bille, vil hvert individ have deres egen idé om hvad en bille er uafhængigt af hinanden. De kan diskutere hvad en bille er, men vil aldrig kunne blive helt enige. Endvidere kan et individs kasse endda være helt tom, og begrebet bille er herved for dette individ den tomme mængde eller ingenting. Denne problemstilling fungerer på samme måde, som den mentale problemstilling fremsat ovenfor, hvor kassen blot er skiftet ud med vores mentale konstruktion.

Et andet fremtrædende punkt på dagsordenen inden for den matematiske filosofi er holdningen til uendelighedsprincippet. Der er mange forskellige holdninger til uendelighed indenfor de forskellige former for intuitionisme, men fælles for dem alle er, at de afviser at utællelige uendelige mængder eksisterer. Cantor definerer netop i sin mændgeteori tællelighed som en naturlig injektiv afbildning fra en (uendelig) mængde over i de naturlige tal. Findes en sådan injektiv afbildning kaldes definitionsmængden af afbildningen for tællelig og ellers utællelig. Intuitionismen kom på dette punkt derfor som en reaktion til Cantors mængdeteori, og afviser altså, at man kan sammenligne uendelige mængders størrelser med hinanden.

Brouwer accepterede med sin intuitionisme den uendelighed, som er defineret ved det induktive princip, nemlig at der til ethvert skridt findes et naturligt næste skridt, som f.eks. ved tællingen af de naturlige tal, og afviste den uendelighed, at en mængde kan være uendelig stor, f.eks. mængden af de naturlige tal, da dette igen vil føre til sammenlignelighed af uendelige mængder, som intuitivt ikke giver mening.

4.3 Vurdering af intuitionismen

På baggrund af alt dette, mener intuitionisterne altså, at vi ved en intuitionistisk fremgangsmetode inden for matematikken, undgår paradokser og andre former for usikkerhed, idet vi kan konstruere os frem til matematiske entiteter via en "korrekt" konstruktionsmetode, og herved netop undgår disse problemer. For at vedholde intuitionismen kræver det selvfølgelig, at vi smider store dele af den matematik vi kender til i dag væk, da vi f.eks. inden for intuitionismen ikke godtager modstridsbeviser, idet dette beror på det udelukkede tredjes princip. Dette var en af årsagerne til, at intuitionismen ikke vandt særlig mange tilhængere blandt matematikere, idet dette bl.a. var en af hovedpunkterne i den mest fremtrædne formalist Hilberts skræmmekampagne imod intuitionismen – hans eget forslag til at lave et grundlag for al matematik skal vi komme ind på snarligst.

Intuitionismen fik oprejsning i 70'erne med bl.a. Lawveres opdagelse af, at knippeteori inden for algebra kunne repræsenteres med modeller af intuitionistisk logik. Med disse modeller kunne man finde resultater inden for knippeteorien, som ellers ville kræve en masse beregninger. Desuden har intuitionismen vundet meget land inden for computervidenskab, da den intuitionistiske logik stemmer fint overens med logikken benyttet inden for datalogi.

5 Formalisme[11]

SOM nævnt før var David Hilbert (1862-1943), en fremtrædende matematiker og formalist, med sin skræmmekampagne mod intuitionisterne med til at gøre intuitionismen upopulær hos mange matematikere. Han selv var imod ideen, at al daværende matematik skulle forkastes til fordel til en matematik, der skulle bygges op fra bunden; 'vi løber risikoen at miste vores mest værdifulde skat,' formulerer han det. Hans eget forslag til at danne et grundlag for al matematik var meget radikalt og blev også selv udsat for kritik. Uddybning på hans formalisttitel følger.

Formalisterne mente – i korte, meget grove træk – at matematik var en række tegn og en dertilhørende række regler for at manipulere med disse.

Selve termen "formalisme" knytter sig ikke til ét bestemt syn på matematikken, men til flere, hvor nogle opponerer hinanden på meget væsentlige punkter. Stewart Shapiro fremhæver to af disse, som han mener kan gøre krav på termen fra en historisk indfaldsvinkel, og betegner disse to *begrebsformalisme* og *spilformalisme*.

Begrebsformalisme er ifølge Shapiro holdningen, at matematik handler om tegn og symboler. Begrebsformalisten mener dertil, at matematiske entiteter *er* disse tegn og symboler, og matematisk viden er viden, om hvordan disse er indbyrdes relateret og om hvordan de manipuleres. Centralt i termformalismen er endelig, at det eneste, der er vigtigt, er netop tegnene – der behøves ingen fortolkning af disse i termformalismen. Men skal man benytte denne formalisme til at forklare matematik, er det måske nemt nok at sætte tegn på de rationale tal, men hvad med reelle tal med uendelig lange decimaludviklinger (såsom π, hvis vi skulle skrive det ud)? Der er ikke nok forskellige tegn til at symbolisere alle disse, og hvis vi støder på et problem allerede her, så er sætninger næsten værre at tænke på – hvad gør vi med dem?

Spilformalisten opponerer termformalisten i den forstand, at han mener, at matematikken ikke handler om tegn og symboler, men om intet specielt. Tegnene og symbolerne har ingen matematisk fortolkning, og udøvning af matematik svarer til at spille et spil med disse tegn og symboler, med et indbygget vist regelsæt. Det eneste, der betyder noget, er, at reglerne bliver fulgt. En typisk kritik af denne formalisme ville være at spørge, hvordan det forklarer, at matematikken har anvendelighed inden for andre videnskaber. Hvis matematikken ikke handler om noget, kunne andre formelle sprog med regelsæt, såsom ludo, lige så godt forklare verden. Der er ikke noget argument for, hvorfor matematikken er brugbar.

Vores historiske indfaldsvinkel er dog formalismen som løsning på grundlagskrisen, og den klart vigtigste personage – i hvert fald den mest toneangivende – er naturligvis Hilbert. Hans program for at løse grundlagskrisen tager i bund og grund det bedste fra begge ovenstående verdener og føjer en ny variant af formalismen til.

Hilbert skriver i anslaget af sin *Grundlagen der Geometrie* (1899):

> Lad os forestille os tre forskellige systemer af ting: tingene i det første system kalder vi *punkter* og betegner A, B, $C\ldots$; tingene i

[11] Dette afsnit er inspireret af Stewart Shapiro: Thinking About Mathematics, Oxford: Oxford University Press, 2000, afsnittet "Formalism: Do mathematical statements mean anything", side 141-170.

det andet system kalder vi *rette linjer* og betegner a, b, $c\ldots$; tingene i det tredje system kalder vi *planer* og betegner α, β, $\gamma\ldots$; ...

Vi forestiller os punkterne, de rette linjer og planerne som havende visse indbyrdes relationer, og betegner disse relationer med ord som "ligge", "mellem", "kongruent"; den præcise, matematiske beskrivelse af disse relationer følger gennem aksiomerne for geometri.

(Hilbert, 1899, s. 2)

De derpå følgende aksiomer angiver altså netop relationerne for de tre nyligt "definerede" begreber. Det er værd at bemærke, at Hilberts begreber, som 'punkt', er intet andet end kaldenavne til matematiske entiteter; de matematiske entiteter er ikke bundet ved deres navn[12].

Endnu vigtigere er, at begreberne slet ikke bliver defineret i sig selv, men kun i forhold til andre begreber – definitionerne er implicitte, og karakterisering af begreber bliver ikke af ét enkelt for sig selv, men af flere begreber på samme tid. Den prævalente intuition i geometri fik dermed et alternativ. Hilbert forsøgte med sin bog at rette op på Euklids fejltagelser og manglende forklaringer, og i Euklids tekster lå den rumlige intuition og observation til grund for aksiomerne, der blev fremstillet i dem. For Hilbert var intuitionens rolle kun motiverende og ikke matematisk, og de formulerede aksiomer skulle være grundpillerne i geometrien. Denne "rene" abstrakte og deduktive geometri stod altså over for den deskriptive geometri, der beskæftigede sig med den rumlige, fysiske virkelighed.

Det væsentlige hos Hilbert bliver altså aksiomatisering. For at vise, at hans aksiomatisering af geometrien var konsistent – altså at et prædikat og dets negerede ikke begge gjaldt efter aksiomerne – konstruerede han en model med reelle tal, hvor aksiomerne var opfyldt. Skulle den rumlige intuition spille en rolle, som var andet end heuristisk, ville den sige, at aksiomerne oplagt var sande, hvorpå konsistensbeviset ville være unødvendigt – hvorfor ville Hilbert så vise konsistensen?

Frege prøvede at rette Hilbert i hans opfattelse af definitioner og aksiomerne. Han mente i respons til Hilberts filosofiske tilgang til matematik, at definitioner skulle specificere betydningen af et ord, hvis betydning ikke endnu var givet, og dertil kun bruge ord, hvis betydninger allerede var givet. Aksiomer skulle derimod ikke bruge ord, hvis betydning ikke allerede var givet, og det eneste spørgsmål ved disse skulle være om de var sande eller ej – hvilket de *skulle* være. Hvis altså ordene i aksiomerne ikke gav mening, så kunne aksiomerne ikke være sande, og dermed ikke være aksiomer. Han accepterede ikke, at et implicit definitionssystem gav en konkret struktur. I respons til Hilberts ønske om konsistens mente han, at eftersom aksiomerne var en samling intuitive sandheder, ville disse, som sandheder, ikke modsige hinanden, og derfor ville der ikke være behov for at vise konsistens.

Men Hilbert ville ikke have noget med intuition at gøre. Han mente, at direkte definitioner ikke kunne bruges i udviklingen af matematik, og det bedste, vi kunne gøre, ville være at holde os til de implicitte definitioner, som blev givet i aksiomerne. Endnu mere interessant mente han, at aksiomernes sandhed forudsætter konsistens: 'If the arbitrarily given axioms do not contradict each other with all their consequences, then they are true and the things defined by

[12] I en diskussion på en togstation i Berlin i 1891 sagde Hilbert, at i en ordentlig aksiomatisering af geometri skulle man altid kunne sige "borde, stole og ølkrus" i stedet for "punkter, rette linjer og planer".

them exist.' Aksiomerne kan altså også være hvilke som helst, bare systemet af dem er konsistent. Hilberts konsistensbevis med de reelle tal for sine geometriske aksiomer, afgjorde altså, at al geometri med disse aksiomer var konsistent (fordi aksiomerne ikke var bundet sig til eksplicitte definitioner af begreber), og i Hilberts øjne sand.

Hilberts tankegang i forbindelse med denne aksiomdannelse er *deduktivistisk*. Deduktivismen tager sit cue fra Frege, hvormed logik selvfølgelig spiller en rolle i denne. Hvis nogen starter med at fortolke aksiomerne for en gren af matematikken til at være sande, kan vi ikke direkte garantere, at sætningerne under samme gren er sande – vi vil gerne kunne slutte, at de er. Formaliserer man grenen, ville vi have en bunke tegn og nogle regler til at manipulere med dem, og denne manipulation ville kunne ske uden hensyn for mening eller fortolkning. Vores ønske om sandhed kan kun opfyldes, hvis reglerne ikke er arbitrære, men udgør logiske konsekvenser, hvorpå de er sandhedsbevarende.

Deduktivisten mener nu, at matematikeren ikke skal begynde med aksiomernes sandhed. Reglerne for manipulationen skal være sandhedsbevarende, men insisterer på, at aksiomerne skal behandles, som var de valgt arbitrært og ikke med hensyn til meningsgiven, selvom de sagtens kan *fortolkes* med hensyn til meningsgiven. Hilberts behandler sine aksiomer som sådan, og ved at overføre dem til et konkret system, viser han ikke blot deres konsistens, men dermed også, at der findes en måde at fortolke dem på, hvorpå aksiomerne kan ses som sande.

Med fx den ikke-euklidiske geometri kunne altså nu laves aksiomer, som blev vist konsistente ved at finde frem til og beskrive en struktur, som gjorde dem sande. Havde man et formelt sprog med tegn og symboler og et aksiomssystem, kunne matematikeren nu analysere og vise ting, såsom konsistens, om generelle formelle systemer med kendte matematiske metoder. Dette blev kendt som *metamatematik*.

5.1 Hilberts program

Oven på sin succes med geometrien sprang Hilbert hovedkulds ind i større udfordringer: at aksiomatisere al matematik på den formalistiske facon. Programmet blev først publiceret i 1920'erne, og i modsætning til det sikre, sande grundlag, som logicisterne og intuitionisterne forsøgte at give matematikken, vedholdt Hilbert sin idé om, at konsistens skulle være hovedmålet for grundlaget.

Hilbert ville have, at hele matematikken som formelt system skulle være bygget oven på et aksiomssystem – som i hans *Grundlagen der Geometrie* – som skulle være aritmetisk, og skulle være en udvidelse af denne. Når så systemet var opbygget, vil han tage de metamatematiske briller på og vise dets konsistens ved at finde en struktur, så aksiomerne var sande. Spørgsmålet var blot hvor man skulle finde denne grundlæggende aritmetik, og hvordan skulle man afgøre, om den var sand? Sandheden kunne ikke umiddelbart afgøres, medmindre Hilbert gik ned på et niveau, hvor man epistemisk kunne afgøre sandheden.

Hilbert "introducerer" derfor den *finitte aritmetik*. Finit aritmetik er eksempelvis simple ligninger som '$2 + 3 = 5$' og '1000 er delelig med 4'; altså i bund og grund sætninger, som er mulige at afgøre med en algoritme. Hilbert går helt tilbage til den første linje i anslaget i sin nu 20 år gamle bog om geometri: menneskelig forestilling og anskuelse. Når vi ser tegn og symboler, så foregår det via forestillinger, og den finitte aritmetik skal komme forud for alle tanker, også logiske slutninger. Den vedrører objekter, som vi kan se alle aspekter af; for Hilbert er især dette vigtigt, da det er garant for sikkerheden i sætningerne derunder. Endvidere er den også det eneste, der er muligt at tjekke ved forestilling – sætninger som 'der findes uendelig mange primtal' er ikke afgørlig med en algoritme. Skal vi, som mennesker, kunne stole på nogets sandhed, er det altså den finitte aritmetiks.

Hilbert siger i den finitte aritmetik, at vi identificerer de naturlige tal med numeriske symboler som |, ||, ||| etc. Dermed siger uligheder som '$3 > 2$', at symbolet for 3 er længere end symbolet for 2. I den finitte aritmetik er Hilberts syn altså begrebsformalistisk: tal *er* symboler og intet mere. Men finit aritmetik er selvfølgelig ikke al matematik: ikke-finit aritmetik – "udvidelse" af finit aritmetik, om man vil – som analyse og mængdelære kalder Hilbert *ideel matematik*, hvilken han ser spilformalistisk på. Enhver udgående gren af matematik skal formaliseres, symbolerne og regelsættet skal afgøres og formuleres klart, og derpå skal der bare spilles løs inden for grenene og deres regelsæt.

Hvis finit aritmetik skulle holde til at være grundlag for en formaliseret gren af ideel matematik, skulle der imidlertid garanteres, at man i grenen ikke skulle kunne udlede et falsk udsagn inden for den finitte aritmetik. Ethvert formelt system T med et aksiomssystem inden for idealmatematikken skulle være en *konservativ udvidelse* af finit aritmetik, og dette kunne kun sikres, hvis T var konsistent. Hvis altså hvert sandt udsagn inden for finit aritmetik svarede til en sætning i T og T benyttede et standardregelsæt, ville T være en konservativ udvidelse. Hilberts deduktivisme spiller altså også ind i hans krav om konsistens, for at vi kan tale om en udvidelse fra sandhed til 'større' sandhed.

Hilberts havde altså nu fundet en sand aritmetik, men dog ikke afgjort, hvor meget den udgjorde. Hilberts program begyndte i alle fald nu at tage form: hans tanke om at formalisere al matematik ville også indebære al metamatematik med sine regelsæt og symboler, hvorpå han med sin sikre metode, finit aritmetik, ville analysere alle formelle systemer af matematik. Selv skriver han 'a formalized proof, like a numerical symbol, is a concrete and visible object. We can describe it completely.' Hans mål var altså at formalisere alle grene af matematik, og derpå med metamatematik og finit aritmetik vise konsistensen for alle disse. Mere sandt kunne det ikke blive.

5.2 Vurdering af Hilberts program

Det kunne på ydersiden virke som om alt var fryd og gammen nu, hvis ikke det var for Gödels to ufuldstændighedssætninger, som blev publiceret i 1931.

Godt nok kunne al matematik formaliseres, men det kneb lidt med det andet. Hilbert ville have et system dækkende over al matematik (eller aritmetik), der både var konsistent og fuldstændigt, altså et system T, hvor det gjaldt for enhver sætning, at den enten kunne bevises eller modbevises inden for T.

Gödel viste først, at der for et givet formelt konsistent system T altid findes en sætning, hvis bevisélighed er uafgørlig. Altså kan vi ikke komme frem til alle sande matematiske sætninger i et konsistent formelt system, og dermed kan et konsistent system ikke være fuldstændigt. Han udledte derpå af dette, at et konsistent system (der indeholder aritmetikken) ikke kunne vise sin egen konsistens, og selvfølgelig dermed heller ikke konsistensen af noget, det var en del af. Altså kunne man med det finitte grundlag ikke vise konsistensen af det formelle system, man ville have matematik til at være. Dette var i sig selv slemt nok, men at Gödel brugte *formaliserede* metamatematiske argumenter var det værste slag. Formalismen kom bag på sig selv, og var der altså håb om en decideret sikkerhed og konsistens i formaliseringen, kunne man godt skyde en hvid pind efter det.

Kunne man modificere ønsket om konsistens? I senere respons til ovenstående ville formalisten Haskell B. Curry som Hilbert have, at de formelle systemer var konsistente, men Curry kunne ikke følge Hilbert i, at der måtte kræves et bevis på konsistensen. Så længe vi endnu ikke havde fundet inkonsistens i en teori, ville et konsistensbevis ikke afgøre, hvor brugbar teorien kunne være.

Men selv når vi gør os disse mindre strenge tanker, er det også værd at tænke på, hvad det egentlig vil sige, at matematik er bare brikker og spilleregler. Formalismen har ideologisk set hjulpet matematikere til at fortsætte videre på sporet, og ikke at overveje de filosofiske forhindringer, der har stået i vejen undervejs. Det er i sig selv grunden til dens succes, men også til at den kan tolkes mere eller mindre som en filosofisk forsvarsposition. Skulle sikringen af fundamentet blot være, at filosoffer kan lade matematikere være i fred, synes matematikken at miste sin alvor – hvorfor den netop kan være så deskriptiv, kan ikke opretholdes af formalismer. Hilberts program tillader matematikken bare at være matematik, meningsløs eller ej, men den udelukkende internalistiske natur er lidt hen i vejret – vi må have noget at forbinde den til.

6 ZFC

DET står nu klart, at hverken logicismen, formalismen eller intuitionismen kunne være det sikre grundlag matematikken manglede. Logicismen og formalismen kunne ikke fuldføre det de ønskede, mens intuitionismen ville forkaste for meget allerede accepteret matematik.

I starten af 1900-tallet blev ZFC udviklet. ZFC står for Zermelo, Fraenkel og Choice, som hentyder til dels de to matematikere, Ernst Zermelo og Abraham Fraenkel, der primært udvilkede ZFC, og til aksiomet kaldet *Axiom of choice*. ZFC består af 10 aksiomer og disse aksiomer giver et mængdeteoretisk grundlag for størstedelen af matematikken. Men i modsætning til den sædvanlige definition af aksiomer, nemlig at de er selvindlysende sande, opfylder kun få af aksiomerne dette. Det kan derfor diskuteres om ZFC giver anledning til et acceptabelt grundlag. Dog mente Zermelo aldrig, at målet med aksiomerne var, at de skulle være selvindlysende. Aksiomerne skulle blot sikre de rigtige resultater i matematikken. Zermelo fandt aksiomerne tilfredsstillende, fordi man kunne udlede de rigtige resultater, og fordi det umiddelbart ikke var muligt at udlede dem uden brug af disse aksiomer.

Det har dog ikke forhindret folk i at tvivle på flere af aksiomerne. Specielt *Axiom of choice* har fået megen kritik. *Axiom of choice* angiver bl.a. at hvis man har en uendelig mængde af ikke-tomme disjunkte mængder, så er det altid muligt vælge et element fra hver af disse mængder og kombinere dem til en ny mængde. Baggrunden for kritikken var, at ved hver mængde skal der vælges et element, og da der er uendelig mange mængder denne procedure skal foretages på, skal der træffes uendelig mange valg. Men om det er muligt, at dette kan lade sig gøre, altså at foretage uendeligt mange valg, er stadig til diskussion blandt matematikere.

Zermelo følte dog ikke, at han havde et behov for at begrunde aksiomet. Han havde allerede vist sætninger, som krævede aksiomet og mente derfor, at det var kritikernes opgave at vise unødvendigheden af det. Aksiomets unødvendighed er aldrig blevet vist, men dog fører det mindre klare resultater med sig. Banach-Tarski-paradokset er en sætning, der angiver, at hvis en massiv kugle bliver delt op i mindre stykker, kan disse stykker samles til to kugler, identiske med den første. Beviset for denne sætning benytter *Axiom of choice*, men det er klart, at denne sætning ikke virker intuitivt sand.

ZFC gav anledning til en ny grundskole: pragmatisk formalisme. Denne grundskole ønskede blot at give et mængdeteoretisk grundlag, som sikrede, at man kunne fortsætte det matematiske arbejde, og man accepterede, at man ikke kunne give matematikken et filosofisk grundlag. Grundlagskrisen sluttede dermed ikke ved at give matematikken det grundlag man oprindeligt ønskede at finde, men nærmere at give den et acceptabelt grundlag, der sikrede, at den matematiske udvikling kunne forsætte som hidtil.

7 Diskussion: Er det muligt at give matematikken en form for grundlag?

MAN må her først overveje, om man er ontologisk realist eller ontologisk antirealist med hensyn til matematiske størrelser. Hvis man er ontologisk realist, tror man jo, at de matematiske objekter eksisterer uafhængigt af os mennesker, og det ville derfor være forkert at snakke om at give matematikken et grundlag. Da den eksisterer uafhængigt af os, har den jo selvfølgelig også et grundlag uafhængigt af os. Vores opgave ville derfor være at opdage/udforske matematikken, frem for at konstruere den. Når det er sagt, har det selvfølgelig en pris at være ontologisk realist med hensyn til matematiske størrelser. For hvordan forklarer man eksempelvis, hvor matematikken kommer fra? Hvorfor vi mennesker kan erkende matematiske objekter? Og hvordan denne erkendelsesproces skulle foregå? Hvis vi ikke har svarene på disse spørgsmål, er det jo umuligt at afgøre, hvornår noget i det hele taget er matematik.

Et eksempel på ontologisk realisme med hensyn til matematiske størrelser er platonismen, som nævnt i indledningen af denne opgave. Selvom platonismen i sin rene form giver en god forklaring på mange af de filosofiske problemer der findes med hensyn til matematikken, er det dog de færreste, der kan godtage forklaringen om ideernes verden. Ideernes verden er jo en verden, hvis ontologi virker så fjern fra alt, hvad vi ellers kender, at det er svært for os at acceptere dens eksistens. Og skulle man acceptere dens eksistens, er det nok de færreste der også vil gå med til at sjælen er udødelig. Derfor er det da også en mere moderne udgave af platonismen man oftest ser i dag. I denne moderne udgave tilskriver man stadig matematiske objekter realeksistens, men uden at godtage hele Platons teori om ideernes verden. Med denne filosofiske position skylder man dog igen en forklaring på spørgsmålene, der blev nævnt tidligere, så selvom det er tiltalende, at matematiske objekter skulle have realeksistens, er der for mange uafklarede spørgsmål til, at det efter vores mening kan være en tilfredsstillende position at tage. Fra nu af vil det derfor være fra et ontologisk antirealistisk synspunkt med hensyn til matematikken, at vi vil undersøge, om det er muligt at give matematikken et sikkert grundlag.

Eftersom Gödel i 1931 viste, at ethvert formelt system, der er stærkt nok til mindst at indeholde aritmetikken ikke kan bevises konsistent, må man sige at det grundlag vi har i dag, langtfra er et sikkert grundlag. ZFC kan bruges så længe vi kan bevise de sætninger vi gerne vil, og der ikke opdages modstrider i systemet, for skulle vi en dag enten opdage modstrider eller finde tilpas meget interessant matematik vi ikke kan bevise i ZFC, vil man uden tvivl forkaste ZFC for et andet nyere formelt system. Derfor er ZFC, for os at se, et midlertidigt grundlag, som primært tilfredsstiller den "arbejdende matematiker" lige nu.

For den mere moderne formalisme, hvor man har accepteret, at man aldrig kan opnå et konsistent system, er dette dog ikke nødvendigvis et problem. Selvom ZFC ikke udgør et sikkert grundlag, kan man hævde, at formalismen stadig udgør et grundlag. Hvis man bare ser matematik som en "leg med arbitrære symboler i et formelt system", er det, som formalisten Haskell B. Curry påpeger, jo lige meget hvilket formelt system det foregår i. Derfor vil det heller ikke være et problem, at man fra tid til anden skifter sit "favoritsystem" ud med et "bedre" system.

Der er dog alligevel et par kritikpunkter ved dette moderne formalistiske synspunkt. For det første virker matematik, for de fleste, som mere end blot en leg med symboler. Vi har en intuition for matematik, der virker dybere end de arbitrære symboler, vi bliver præsenteret for. Vi opfatter eksempelvis heller ikke en sætning som sand, hvis bare den kan bevises i et formelt system – den skal helst også bekræfte vores intuition. For det andet forklarer formalismen ikke hvorfor matematikken så ofte viser sig brugbar i den virkelige verden. Hvis det bare er arbitrære symboler, er de jo på ingen måde forbundet til den virkelige verden, og så er det da ret mærkeligt, at matematikken specielt viser sig så anvendelig inden for bl.a. fysik, kemi, biologi osv. Til det andet kritikpunkt har Curry dog en mulig forklaring. I korte træk siger han, at et formelt system bliver foretrukket frem for et andet, hvis det er mere acceptabelt. Med det mener han, at det er mere anvendeligt til det formål, man har for tanke. Derfor er den anvendelige matematik altså blevet valgt frem for den mindre anvendelige. Historisk set er udviklingen i matematikken dog ikke forløbet sådan, og ser man det som en fremtidig måde at bedrive matematik på, virker det langt fra tilfredsstillende. Det er formentlig de færreste matematikere, der vil arbejde på et formelt system, uden at have den mindste anelse om dets fremtidige brugbarhed. De ville selvfølgelig i højere grad tilpasse systemet efter anvendelsen med det samme.

Selvom den moderne formalisme danner grundlag for det daglige arbejde med matematikken, har den altså nogle mangler rent filosofisk. Det er derfor op til den enkelte at vurdere, om et fast grundlag for matematikken er nødvendigt, eller om det er nok bare at have et grundlag, der sikrer det daglige arbejde. Man skal dog være opmærksom på de konsekvenser det har, hvis man vælger den sidste mulighed.

På baggrund af diskussionen ovenfor, grundlagskrisen og Gödels sætninger virker det alt i alt som en umulig opgave at finde et sikkert grundlag for matematikken inden for matematikken selv, i hvert fald med mindre man er villig til at miste en stor del af den matematik vi har i dag (som intuitionisterne var). I stedet for at fokusere på at give matematikken et fast matematisk grundlag, kunne man derfor overveje hvad matematik i det hele taget er. Hvis man kunne finde ind til kernen af hvad matematik dybest set er, er dette jo et grundlag i sig selv.

Da mennesket er det eneste kendte væsen, der beskæftiger sig med matematik, er det naturligt at prøve at udforske menneskets kognitive mekanismer for at finde svar på, hvad matematik essentielt er. Dette blev blandt andet gjort af Rafael Núñez. Núñez opfatter matematikken som et abstrakt fænomen, som vi dels er født med en lille forståelse af, og dels konstruerer ud fra analogier med hverdagsoplevelser. I "Do Real Numbers Really Move" forsøger han at argumentere for, at matematik er mere end blot manipulation med døde symboler, som formalismen hævder. Dette gør han ved at fremhæve nogle af de metaforer, vi bruger i matematikken. Vi siger eksempelvis, at en følge "oscillerer" eller "går mod uendelig", men følgen er jo fastlagt af sin definition, så reelt er der ingen bevægelse. Alligevel bruger vi dynamiske metaforer til at beskrive den, så hvis han kan argumentere for, at disse metaforer er levende, dvs. ikke har mistet deres metaforiske betydning, har han en stærk sag.

Det viser sig dog lidt sværere end som så, i hvert fald på et overbevisende niveau, at argumentere for, at disse metaforer er levende. Evidensen er simpelthen for lille og tvetydig, og det er det, der primært er Núñez' problem. Han giver derfor heller ikke et sikkert grundlag for matematikken, men hans teori har dog nogle gode sider. F.eks. giver den en fin forklaring på, hvorfor vi føler, at matematikken er virkelig, idet vi jo konstruerer den ved hjælp af vores erfaringer af eksempelvis bevægelse, som jo i hvert fald er noget virkeligt for os.

Menneskets kognitive mekanismer virker altså som et område, der stadig er for komplekst til at undersøge til bunds. Det er derfor ikke et område, der på nuværende tidspunkt virker, som om det kan bruges til at forklare, hvad matematik essentielt er. Måske skulle man derfor undersøge, om menneskets mere overordnede biologi kan give en mere tilfredsstillende forklaring.

På baggrund af Darwins evolutionsbiologi ville det være naturligt at se matematikken som værende evolutionspræget. Der er her to forskellige muligheder. Enten kan menneskets forståelse for matematik have udviklet sig med menneskets evolution, f.eks. ved at mennesker, der har været bedre til (specielt brugbar) matematik har haft større chance for at overleve, eller også kan matematikken i sig selv være en evolutionsvidenskab.

Det første syn på matematikken giver dog en meget ringe forklaring på matematikkens udvikling. For det første er matematikken, som vi kender den og så vidt vi ved, udviklet inden for de sidste titusinde år, hvorimod den menneskelige hjerne har gennemgået en meget begrænset udvikling i netop denne periode. Derfor er udviklingen af moderne matematik ikke umiddelbart foregået i samspil med menneskets evolution. For det andet er det tvivlsomt, om mennesker, der har været bedre til brugbar matematik, har haft en evolutionær fordel. Man kunne nemt forestille sig andre evner der har været langt vigtigere før i tiden i forhold til overlevelse, såsom jægerinstinkt og evnen til at dyrke landbrug o.l.

At matematikken i sig selv er en evolutionsvidenskab virker derimod som en mere tilfredsstillende forklaring. Matematikken har jo uden tvivl udviklet sig gennem tiden, og som Jesper Lützen påpeger, har denne udvikling i hvert fald været påvirket af fysikken.[13] Derfor kunne man forestille sig, at den matematik vi har i dag, er kommet til via en udvælgelsesproces, som minder om den, som Darwin foreslår i biologien. Dette synspunkt kommer eksempelvis til udtryk hos Stanislas Dehaene, som skriver:

> ...perhaps pure mathematics should be compared to a rough di-

[13] "En videnskabelig duo: Matematikkens samspil med fysik 1809 - 1950", Jesper Lützen

> amond, raw material that has not yet been submitted to the test of selection. Mathematicians generate an enormous amount of pure mathematics. Only a small part of it will ever be useful in physics. There is thus an overproduction of mathematical solutions from which physicists select those that seem best adapted to their discipline - a process not unlike the Darwinian model of random mutations followed by selection.
>
> (Dehaene, 1997, s. 251)

Dette forklarer hvorfor matematikken (i hvert fald en del af den) ser ud, som den gør, og specielt hvorfor den er så anvendelig. Det forklarer også hvorfor speciel matematik, som tilsyneladende virker uanvendelig, pludseligt viser sig anvendelig. Til gengæld er det uklart, hvordan man på denne måde kommer frem til al den matematik vi har i dag. Hvorfor vælger man at beholde noget matematik frem for noget andet, hvis begge dele tilsyneladende er lige ubrugbare. Der må derfor være nogle flere kriterier der skal vælges efter, hvis man vil opnå al den matematik vi har i dag. Desuden mangler der også historisk evidens for, at matematikkens udvikling er foregået på denne måde. Det kræver altså alligevel en del arbejde, hvis dette synspunkt skal kunne danne et sikkert grundlag for matematikken.

Det virker indtil videre som en umulig opgave at finde et grundlag for matematikken. Ligegyldigt om man søger grundlaget inden for matematikken selv eller ved at undersøge menneskets biologi og kognition, virker det som om man ender med store forklaringsproblemer. Måske er det fordi vi forventer for meget af matematikken. Måske er matematik i virkeligheden ikke anderledes end alle andre videnskaber. Som Hersh skriver:

> It is reasonable to propose a new task for mathematical philosophy: not to seek indubitable truth, but to give an account of mathematical knowledge as it really is - fallible, corrigible, tentative and evolving, as is every other kind of human knowledge.
>
> (Hersh, 1979, s. 43)

Hvis matematikken virkelig er, som Hersh her påstår, er det ikke så mærkeligt, at vi ikke har fundet et sikkert grundlag for matematikken endnu. Det vil jo være umuligt at danne et sikkert grundlag for noget, der i sig selv er fejlbart og i evig udvikling. Vi mangler dog stadig en forklaring på hvad matematik i virkeligheden er og hvordan matematiske objekter skabes. Desværre giver Hersh ikke et bud på en fuld filosofisk position, men mere de overordnede linjer for hvordan den kunne se ud, så der er heller ikke meget hjælp at hente fra ham på dette punkt, men han bekræfter os i, at hvis et grundlag for matematikken skal findes, skal det findes ved at undersøge mennesket og dets kognition.

Alt i alt må vi sige, at det stadig er et åbent spørgsmål om det er muligt at finde et grundlag for matematikken. Men det er også et åbent spørgsmål om et sådant grundlag er nødvendigt. Hvis man er fint tilfreds med at "lege med arbitrære symboler" i formelle systemer og godt kan leve med de filosofiske konsekvenser dette indebærer, er der jo ingen grund til at spilde tiden på at jagte et grundlag.

8 Konklusion

Vi har i denne opgave beskrevet og kommet rundt om matematikkens grundlagskrise, og de tre grundlagsskoler som opstod heraf, og har herved opnået den nødvendige viden for at diskutere dette emne.

Ud fra ovenstående diskussion, kan vi konkludere, at det på baggrund af grundlagskrisen og de tre grundlagsskoler ikke umiddelbart er muligt at danne et sikkert grundlag for matematikken inden for matematikkens egen verden.

Vender man derimod blikket væk fra matematikkens egen verden for at søge en forklaring på dette problem, støder man imidlertid også mod problemer, nemlig at den verden vi nu befinder os i, ikke er tilstrækkelig logisk opbygget til at danne fundament for noget så logisk som matematikken. Dette var bl.a. det der skete med Núñez' forsøg på at forklare matematikken ud fra menneskets kognition og bevægelsesmetaforer.

En helt tredje løsning på dette problem er netop den løsning, som Hersh kom med. Hvis vi nu i stedet for at opfatte matematikken som en idéel videnskab, hvor vores viden inden for denne videnskab kan være ufejlbarlig, opfatter matematikken som en empirisk videnskab ligesom fysik, kemi osv., hvor vores teorier ofte er til debat, og helt ville kunne forkastes f.eks. ved et paradigmeskift, vil vi ikke kunne danne os et grundlag, da et sådant slet ikke ville eksistere.

Vores grundlæggende konklusion er derfor, at det på nuværende tidspunkt ikke er muligt at komme med et konkret endegyldigt grundlag for matematikken, da denne opgave simpelthen er for kompleks til at kunne løses, og vi må derfor tage til takke med et midlertidigt grundlag, som vi kan støtte os til indtil et nyt og bedre grundlag kan tage over.

Litteratur

Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory.* From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic (1981), Jean van Heijenoort (ed.), Cambridge Ma: Harvard University Press, 1923.

Haskell B. Curry. *Remarks on the definition and nature of mathematics.* Philosophy of Mathematics. Selected Readings, 2. ed., Putnam & Benaceraff (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Philip Davis and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhäuser, 1980.

Stanislas Dehaene. *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 1997.

Reuben Hersh. *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics.* Department of Mathematics, University of New Mexico: Academic Press, 1979.

David Hilbert. *The Foundations of Geometry.* Project Gutenberg, 1899.

Jesper Lützen. *En videnskabelig duo: Matematikkens samspil med fysik 1809-1950.* Matematisk afdeling, KU: Matilde, 20, 2004.

Edward Nelson. *Understanding intuitionism.* Princeton University, 1997.

Rafael Núñez. *Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics.* Embodied Artificial Intelligence, F. Iida, R. Pfeifer, L. Steels & Y. Kuniyoshi (eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

Stewart Shapiro. *Thinking about Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 2000.

Ole Skovsmose. *Ud over matematikken.* Viborg: Systime, 1990.

Jaap van Oosten. *Intuitionism.* University of Utrecht, 1996.

Ernst Zermelo. *A new proof of the possibility of a well-ordering, Investigations in the foundations of set theory I.* From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic (1981), Jean van Heijenoort (ed.), Cambridge Ma: Harvard University Press, 1908.