# Alg3
# Første sæt obligatoriske opgaver

Rasmus Sylvester Bryder

16. februar 2010

Henvisninger på formen N $\star$ er til forelæsningsnoterne, og AT refererer til afsnit i "Algebra" af Anders Thorup.

## Opgave C1.1

*Angiv tre ikke-isomorfe grupper af orden 66, og vis, hvorfor de ikke er isomorfe.*

Følgende grupper af orden 66 er ikke isomorfe:

$$(\mathbf{1})\ C_{66}, \quad (\mathbf{2})\ S_3 \times C_{11}, \quad (\mathbf{3})\ D_{33}.$$

$C_{66}$ er den cykliske gruppe af orden 66 (som er isomorf med mængden af restklasser modulo 66, $\mathbb{Z}/66\mathbb{Z}$, jf. 1.93).

$S_3 \times C_{11}$ er det kartesiske produkt af de to grupper $S_3$ og $C_{11}$ med hhv. $3! = 6$ og 11 elementer, og disse er der $6 \cdot 11 = 66$ muligheder for at kombinere i par; altså er der 66 elementer.

$D_{33}$ er gruppen af symmetrier for en regulær 33-kant i planen med mulige drejninger og spejlinger som elementer; da der er 33 af hver, er der 66 mulige symmetrier (jf. AT s. 54-55). Altså har alle grupperne orden 66.

Er to grupper $G$ og $H$ isomorfe, er der for ethvert givet $n \in \mathbb{N}$ det samme antal elementer af orden $n$ i $G$ og i $H$. Kan vi altså finde, at antallene af elementer af orden 2 er forskellige for alle tre grupper, er vi færdige.

**(1)** Jf. beviset for N 1.96 er antallet af elementer af orden $d$ i $C_{66}$, hvor $d \mid 66$, netop $\varphi(d)$, hvor $\varphi$ er Eulers $\varphi$-funktion. Da kun $r = 1$ opfylder $1 \leq r \leq 2$ og $(2, r) = 1$, må $\varphi(2) = 1$ jf. N 1.94. Der er altså ét element af orden 2 i $C_{66}$.

**(2)** $S_3$ består af identitetsafbildningen, tre transpositioner og to 3-cykler af orden hhv. 1, 2 og 3. $C_{11}$ har ingen elementer af orden 2, thi hvis der antages, at der findes et, må $2 \mid 11$ jf. N 1.39, hvilket tydeligvis ikke er sandt.

Det neutrale element i $S_3 \times C_{11}$ er tuplet af de neutrale elementer i hver af grupperne, $(e_S, e_C)$. Lades $g_S \in S_3$ og $g_C \in C_{11}$ har vi jf N 1.144, at

$$(g_S, g_C)^2 = (e_S, e_C) \Leftrightarrow (g_S^2, g_C^2) = (e_S, e_C) \Leftrightarrow g_S^2 = e_S \wedge g_C^2 = e_C,$$

hvilket gælder hvis og kun hvis ordenerne $|g_S|, |g_C| \in \mathbb{N}$ går op i 2, jf. N 1.19, og altså hvis og kun hvis $|g_S|, |g_C| \in \{1, 2\}$. Der findes 4 elementer i $S_3$ med orden

1 eller 2, nemlig identitetsafbildningen og de tre transpositioner; i $C_{11}$ fandtes ingen elementer af orden 2, men ét element af orden 1, nemlig det neutrale element. Der gælder altså, at $|g_S|, |g_C| \in \{1,2\}$, hvis og kun hvis $g_S$ er et af de 4 elementer i $S_3$ med orden 1 eller 2, og $g_C$ er det neutrale element i $C_{11}$. Der er altså netop 4 muligheder for at vælge $g_S$ og 1 mulighed for at vælge $g_C$, så $|g_S|, |g_C| \in \{1,2\}$ og dermed $(g_S, g_C)^2 = (e_S, e_C)$, og dermed er der netop $4 \cdot 1 = 4$ tupler $(g_S, g_C) \in S_3 \times C_{11}$, så $(g_S, g_C)^2 = (e_S, e_C)$.

Da der netop er 4 elementer $(g_S, g_C) \in S_3 \times C_{11}$, så $(g_S, g_C)^2 = (e_S, e_C)$, er der netop 4 tupler $(g_S, g_C) \in S_3 \times C_{11}$, så $|(g_S, g_C)| \mid 2$, hvilket gælder hvis og kun hvis $|(g_S, g_C)| \in \{1,2\}$ (jf. N 1.19). Altså er der 4 elementer i $S_3 \times C_{11}$ af orden 1 eller 2. Da der er ét element af orden 1, må de resterende være af orden 2. Altså er der 3 elementer af orden 2 i $S_3 \times C_{11}$.

**(3)** I $D_{33}$ er der 33 mulige spejlinger (og spejlingsakser) af en regulær 33-kant. Da der gælder for enhver spejling $S \in D_{33}$, at $S \neq \mathrm{id}$ og at $S^2 = \mathrm{id}$, hvor id er drejningen med vinkel 0, har vi, at alle spejlinger har orden 2, hvormed der altså er *mindst* 33 elementer af orden 2. (Faktisk er der netop 33, da der er ingen drejninger af orden 2 i $D_{33}$.)

Da antallet af elementer af orden 2 er forskelligt for alle tre grupper, er de dermed ikke isomorfe.

## Opgave C1.2

*Lad $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ være undergruppen af den symmetriske gruppe af grad 12, $S_{12}$, frembragt af*

$$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \quad \beta = (1\ 7)(2\ 8)(3\ 9)(4\ 10)(5\ 11)(6\ 12).$$

**(1)** *Vis, at $G$ indeholder permutationerne*

$$\gamma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12), \quad \delta = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 9\ 11)(8\ 10\ 12).$$

$G$ består jf. N 1.24 af alle endelige produkter $c_1^{n_1} \cdots c_t^{n_t}$, hvor $c_i \in \{\alpha, \beta\}$ og $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, t$. Kan vi derfor vise, at $\gamma$ og $\delta$ kan skrives som sådanne endelige produkter, må de ligge i $G$.

Vi har nu, at $\beta\alpha\beta = (7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$. Da så

$$(\beta\alpha\beta)^2 = (7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) = (7\ 9\ 11)(8\ 10\ 12),$$

ser vi, at $\gamma = \alpha\beta\alpha\beta$ og $\delta = \alpha(\beta\alpha\beta)^2 = \alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha\beta = \alpha\beta\alpha\alpha\beta = \alpha\beta\alpha^2\beta$, thi vi har, at $\beta^2 = (1)$. Da ser vi, at $\gamma$ og $\delta$ altså kan skrives som endelige produkter af potenser med heltallige eksponenter af $\alpha$ og $\beta$, hvorpå $\gamma, \delta \in \langle \alpha, \beta \rangle = G$.

**(2)** *Vis, at en af permutationerne fra (1) kommuterer med $\alpha$ og med $\beta$, og forklar, hvorfor denne er indeholdt i centret $Z(G)$ af $G$.*

Vi vælger at kigge på $\gamma$. Vi ser først, at permutationerne $\beta\alpha\beta$ (se *(1)*) og $\alpha$ er disjunkte, thi ethvert element i $\{1, \ldots, 12\}$ er fikspunkt for nøjagtig én af permutationerne. Da disjunkte permutationer kommuterer (jf. AT

GRP(1.8)), vil $\beta\alpha\beta$ og $\alpha$ kommutere, og vi får derfor, at

$$\alpha\gamma = \alpha(\alpha(\beta\alpha\beta)) = \alpha((\beta\alpha\beta)\alpha) = (\alpha(\beta\alpha\beta))\alpha = \gamma\alpha \quad \text{og}$$

$$\beta\gamma = \beta(\alpha(\beta\alpha\beta)) = \beta((\beta\alpha\beta)\alpha) = \alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha(1) = \alpha\beta\alpha\beta^2 = (\alpha\beta\alpha\beta)\beta = \gamma\beta,$$

thi $\beta^2 = (1)$; i det ovenstående brugte vi ligeledes, at gruppekompositionen (sammensætning af afbildninger) i $S_{12}$ er associativ.

Vi kan bruge dette til at vise, at $\gamma \in Z(G)$. Da $\gamma$ kommuterer med $\alpha$ og $\beta$, vil $\gamma$ også kommutere med enhver heltallig potens af $\alpha$ og $\beta$. Vi bruger definitionerne fra N 1.17 til at vise dette.

Lad altså $c \in \{\alpha, \beta\}$. $\gamma$ kommuterer da med $c$, og $\gamma c^n = c\gamma c^{n-1} = \cdots = c^n\gamma$ for $n \in \mathbb{N}$. Thi $\gamma c^{-1} = c^{-1}c\gamma c^{-1} = c^{-1}\gamma c c^{-1} = c^{-1}\gamma$, vil $\gamma$ kommutere med $c^{-1}$, og $\gamma c^{-n} = \gamma(c^{-1})^n = c^{-1}\gamma(c^{-1})^{n-1} = \cdots = (c^{-1})^n\gamma = c^{-n}\gamma$ for $n \in \mathbb{N}$. Da vi klart har, at $\gamma c^0 = \gamma = c^0\gamma$, får vi det ønskede.

Lad nu $\sigma \in G$. Da vil $\sigma$ kunne skrives som et endeligt produkt af potenser med heltallige eksponenter af elementer i $\{\alpha, \beta\}$, dvs. $\sigma = c_1^{n_1} \cdots c_t^{n_t}$, hvor $c_i \in \{\alpha, \beta\}$ og $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, t$ (jf. N 1.24), og vi får nu, at

$$\gamma\sigma = \gamma c_1^{n_1} \cdots c_t^{n_t} = c_1^{n_1}\gamma \cdots c_t^{n_t} = \cdots = c_1^{n_1} \cdots c_t^{n_t}\gamma = \sigma\gamma,$$

grundet foregående resultat. Altså kommuterer $\gamma$ med alle elementer i $G$, og jf. N 1.79 må $\gamma \in Z(G)$.

# Opgave C1.3

*Lad $\phi : G \to H$ være en homomorfi fra gruppen $G$ til gruppen $H$.*

**(1)** *Vis, at $\phi$ anvendt på en kommutator i $G$ er en kommutator i $H$.*

Lad $a, b \in G$ og lad $e_G, e_H$ være de neutrale elementer i hhv. $G$ og $H$. Vi har nu jf. N 1.66, thi $\phi(e_G) = \phi(e_G e_G) = \phi(e_G)\phi(e_G)$, hvorpå $\phi(e_G) = e_H$, at

$$\phi(a)^{-1} = \phi(a)^{-1}\phi(e_G) = \phi(a)^{-1}\phi(aa^{-1}) = \phi(a)^{-1}\phi(a)\phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1}).$$

Jf. N 1.66 og N 1.5 fås nu for kommutatoren $[a, b]_G$, at

$$\begin{aligned} \phi([a,b]_G) &= \phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a^{-1})\phi(b^{-1}) \\ &= \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1} = [\phi(a), \phi(b)]_H, \end{aligned}$$

thi $\phi(a), \phi(b) \in H$. Altså er billedet selv en kommutator.

**(2)** *Lad $G^{(1)}$ og $H^{(1)}$ være kommutatorundergrupperne i hhv. $G$ og $H$. Vis, at $\phi(G^{(1)}) \subseteq H^{(1)}$.*

Lad $x \in G^{(1)}$. Da vil $x$ være et endeligt produkt af potenser med heltallige eksponenter af kommutatorer i $G$ (jf. N 1.53 og N 1.24), dvs. $x = [a_1, b_1]^{n_1} \cdots [a_t, b_t]^{n_t}$, hvor $a_i, b_i \in G$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, t$. Vi får nu ved at benytte **(1)**, at

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi([a_1, b_1]_G^{n_1} \cdots [a_t, b_t]_G^{n_t}) \\ &= \phi([a_1, b_1]_G^{n_1}) \cdots \phi([a_t, b_t]_G^{n_t}) \\ &= \phi([a_1, b_1]_G)^{n_1} \cdots \phi([a_t, b_t]_G)^{n_t} \\ &= [\phi(a_1), \phi(b_1)]_H^{n_1} \cdots [\phi(a_t), \phi(b_t)]_H^{n_t}, \end{aligned}$$

hvorpå $\phi(x)$ er et endeligt produkt af potenser med heltallige eksponenter af kommutatorer i $H$. Da må $\phi(x) \in H^{(1)}$, og derpå er $\phi(G^{(1)}) \subseteq H^{(1)}$.

*Antag nu, at $\phi$ er en epimorfi.*

**(3)** *Vis, at $\phi(G^{(1)}) = H^{(1)}$.*

Vi skal vise, at $H^{(1)} \subseteq \phi(G^{(1)})$, thi **(2)** gælder for alle homomorfier.

Lad derfor $x \in H^{(1)}$. $x$ er et endeligt produkt af potenser med heltallige eksponenter af kommutatorer i $H$, dvs. $x = [c_1, d_1]_H^{m_1} \cdots [c_s, d_s]_H^{m_s}$, $c_i, d_i \in H$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, s$.

Da $\phi$ er en epimorfi, må der for alle $i \in 1, \ldots, s$ findes $p_i, q_i \in G$, så $\phi(p_i) = c_i$ og $\phi(q_i) = d_i$. Altså vil $x = [\phi(p_1), \phi(q_1)]_H^{m_1} \cdots [\phi(p_s), \phi(q_s)]_H^{m_s}$, og ved at regne tilbage via udregningerne i **(1)**, vil

$$x = \phi([p_1, q_1]_G)^{m_1} \cdots \phi([p_s, q_s]_G)^{m_s} = \phi([p_1, q_1]_G^{m_1} \cdots [p_s, q_s]_G^{m_s})$$

pr. udregningerne i **(2)**. Da $[p_1, q_1]_G^{m_1} \cdots [p_s, q_s]_G^{m_s}$ er et endeligt produkt af potenser med heltallige eksponenter af kommutatorer i $G$, vil det ligge i $G^{(1)}$.

Altså vil $x = \phi([p_1, q_1]_G^{m_1} \cdots [p_s, q_s]_G^{m_s}) \in \phi(G^{(1)})$; dermed er $H^{(1)} \subseteq \phi(G^{(1)})$.

**(4)** *Antag, at $G$ er en endelig gruppe. Vis, at $|H : H^{(1)}|$ går op i $|G : G^{(1)}|$.*

Vi benytter epimorfien $\phi$ og lader $\kappa : H \to H/H^{(1)}$ være den kanoniske epimorfi pr. N 1.70; dette kan vi, idet $H^{(1)} \triangleleft H$ jf. N 1.54. $\kappa$ sender altså elementer i $H$ over i de tilhørende sideklasser modulo $H^{(1)}$. Vi definerer nu $\psi = \kappa \circ \phi : G \to H/H^{(1)}$. $\psi$ er en homomorfi, thi for $x, y \in G$ er $\psi(xy) = \kappa(\phi(xy)) = \kappa(\phi(x)\phi(y)) = \kappa(\phi(x))\kappa(\phi(y)) = \psi(x)\psi(y)$. Den er endvidere surjektiv, da den er en sammensætning af to surjektive afbildninger.

Vi har, at det neutrale element i gruppen $H/H^{(1)}$ er sideklassen $e_H H^{(1)}$ jf. N 1.60. Vi har nu, at $x \in \ker \psi \Leftrightarrow e_H H^{(1)} = \psi(x) = \kappa(\phi(x)) = \phi(x) H^{(1)}$.

Vi har for $a, b \in H$, at de to sideklasser $aH^{(1)}$ og $bH^{(1)}$ er ens, hvis og kun hvis $a^{-1}b \in H^{(1)}$ (thi sideklasserne er ækvivalensklasserne for ækvivalensrelationen $a \sim_{H^{(1)}} b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H^{(1)}$ jf. N 1.35).

Altså gælder med ovenstående, at $x \in \ker \psi \Leftrightarrow e_H^{-1}\phi(x) = \phi(x) \in H^{(1)}$. Da vi har for ethvert $y \in G^{(1)}$, at $\phi(y) \in H^{(1)}$ (jf. **(2)**), vil så gælde, at $y \in \ker \psi$. Altså vil $G^{(1)} \subseteq \ker \psi$.

Jf. Homomorfisætningen N 1.77 vil med homomorfien $\psi : G \to H/H^{(1)}$ gælde, at $G/\ker \psi \simeq \psi(G) = H/H^{(1)}$, thi $\psi$ er surjektiv. Da $G/\ker \psi$ er isomorf med $H/H^{(1)}$, er der altså en 1-1-korrespondence mellem elementerne i $G/\ker \psi$ og $H/H^{(1)}$. Altså vil elementantallene være ens, og således giver N 1.60, at

$$|G : \ker \psi| = |G/\ker \psi| = |H/H^{(1)}| = |H : H^{(1)}|.$$

Vi har, at $G^{(1)}$ er en undergruppe i $\ker \psi$ jf. N 1.12, da $G^{(1)}$ ikke er tom (da $e_G \in G^{(1)}$), $G^{(1)}$ er en undergruppe i $G$ (hvorpå $ab^{-1} \in G^{(1)}$ for alle $a, b \in G^{(1)}$) og $G^{(1)} \subseteq \ker \psi$. Jf. N 1.69 er $\ker \psi$ også en undergruppe i $G$. Da $G$ var antaget endelig, fås ved N 1.42, at

$$|G : G^{(1)}| = |G : \ker \psi||\ker \psi : G^{(1)}| = |H : H^{(1)}||\ker \psi : G^{(1)}|.$$

Altså vil $|H : H^{(1)}|$ gå op i $|G : G^{(1)}|$.