1 Homotopiteori (deformationsretrakt, mapping cone og HEP)

1. Introducér **homotopi**, **deformationsretrakt**, **homotopiækvivalenser** og **HEP**
2. Vis, at (X, A) har HEP hvis og kun hvis $X \times I$ retraherer til $X \times \{0\} \cup A \times I$
3. Vis, at (D^n, S^{n-1}) har HEP ud fra radialprojektion
4. Vis, at hvis (X, A) har HEP og A er kontraktibel, er kvotientafbildningen $X \to X/A$ en homotopiækvivalens
5. Vis, at hvis (X, A) har HEP og $\varphi : B \to Y$ er en kontinuert afbildning fra et underrum $B \subseteq A$ til et topologisk rum Y, har $(Y \cup_\varphi X, Y \cup_\varphi A)$ HEP
6. Vis, at for par (X, A) med HEP vil $X \cup CA \simeq X/A$
7. Introducér **mapping cone** C_φ
8. Konkludér, at (C_φ, Y) har HEP for $\varphi : X \to Y$ (benytter, at (CX, X) har HEP)

2 Lange eksakte følger i singulær homologi

1. Definér **homologigrupper** for topologisk rum X og **relative homologigrupper** for par (X, A)
2. Beskriv, at man kan opnå en lang eksakt følge i relativ homologi ved Homologisk Algebras Fundamentalsætning
3. Fortæl om forskellige lange eksakte følger, deriblandt reduceret og Mayer-Vietoris
4. Vis, at $\widetilde{H}_*(X) \simeq H_*(X, *)$
5. Vis, at for gode par (X, A) vil kvotientafbildningen $(X, A) \to (X/A, A/A)$ give en isomorfi i homologi $\widetilde{H}_*(X/A) \simeq H_*(X, A)$
6. Vis, at der ikke findes retraktion $D^n \to \partial D^n$ **eller** find homologigrupperne for S^n

3 Δ-sets og simpliciel homologi

1. Definér **Δ-set** og **Δ-kompleks**
2. Definér **topologisk realisering af et Δ-set**, som giver et Δ-kompleks
3. Definér **de simplicielle homologigrupper** $H_*^\Delta(X)$ ud fra Δ-komplekser X
4. Vis, at når man tilsvarende definerer de singulære homologigrupper $H_*(X)$, at man opnår de samme grupper
5. Bestem homologigruppen for torus T, hvis der er tid!

4 CW-complexes og cellulær homologi

1. Definér **CW-complex**
2. Vis, at $H_k(X^n, X^{n-1})$ kun ikke er 0 hvis $k = n$ og hvad den består af, at $H_k(X^n) = 0$ for $k > n$ og at $H_k(X^n) \simeq H_k(X)$ for endelig-dimensionale CW-complexes X og $k < n$
3. Definer *cellulær homologi* $H_*^{CW}(X)$
4. Vis, at $H_*^{CW}(X) = H_*(X)$
5. Beskriv umiddelbare konsekvenser af dette (homologi er uafhængigt af CW-complex-struktur, hvis der er ingen n-cells, er $H_n(X) = 0$ og hvis der ikke er to celler i på hinanden følgende dimensioner, er $H_n(X) \simeq \mathbb{Z}$ hvis der er en n-cell) og find homologigrupper for enten S^n $(n \geq 1)$ eller $\mathbb{C}P^n$
6. Beskriv **cellular boundary formula**

5 Homotopiinvarians

1. Beskriv de inducerede afbildninger af en kontinuert afbildning $X \to Y$ (og definér chain map undervejs)
2. Definér kædehomotopi af chain maps
3. Vis, at de inducerede afbildninger af to homotope afbildninger er ens på homologigrupperne ved prism operators (ved at vise, at prism operators er kædehomotopier mellem de inducerede) i tilfældet $n = 2$ (beviset er langt)
4. Konkludér, at hvis to rum er homotopiækvivalente, at deres homologigrupper er isomorfe (fx kontraktible rum)
5. Beskriv de inducerede afbildninger af en kontinuert afbildning $(X, A) \to (Y, B)$
6. Vis, at de inducerede afbildninger af to homotope afbildninger $(X, A) \to (Y, B)$ er ens på de relative homologigrupper
7. Evt. Euler-karakteristik

6 Excision og Mayer-Vietoris sequences

1. Beskriv hvad excision er (en inklusion $(X - Z, A - Z) \to (X, A)$ er en excision hvis homologigrupperne er isomorfe)
2. Opskriv excisionssætningen i begge versioner og vis ækvivalens af de to
3. Definér kædegrupper for en åben overdækning og beskriv, at inklusionen giver en isomorfi under homologi (ved at der findes en chain map i den anden retning så sammensætningerne er kædehomotope med identiteterne)

4. Vis ved 5-lemma, at inklusioner mellem relative homologigrupper på samme måde giver isomorfi
5. Vis excisionssætningen ud fra dette
6. Vis, at Mayer-Vietoris sequences er eksakte
7. Hvis der er tid, vis invarians af dimension

7 Grader af afbildninger $S^n \to S^n$

1. Definér **graden** $\deg f$ af en afbildning $f : S^n \to S^n$
2. Giv eksempler på grader af afbildninger, deriblandt den antipodiske afbildning $x \mapsto -x$, og vis, at hvis $f : S^n \to S^n$ ikke er surjektiv, har f grad 0
3. Definer lokal grad $\deg f|x_i$
4. Vis, at $\sum_i \deg f|x_i = \deg f$
5. Snak evt. om cellular boundary formula

8 Euler-karakteristik

1. Definér Euler-karakteristik for (næsten) ethvert topologisk rum X
2. Beskriv hvorfor forskellige Euler-karakteristika af to rum giver, at rummene ikke er homotopiækvivalente
3. Bevis for endeligdimensionale CW-complexes, at Euler-karakteristik kan findes ved den alternerende sum af antallet af n-celler
4. Vis, at kontraktible rum har Euler-karakteristik 1, men at det ikke gælder den anden vej (betragt S^2 med en streng inde i kuglen fra nordpol til sydpol)
5. Evt. Euler-karakteristik af kompakte overflader

9 Homologien af et kvotientrum X/A

1. Introducér, og beskriv, at man kan opnå en lang eksakt følge i relativ homologi ved Homologisk Algebras Fundamentalsætning
2. Beskriv hvad excision er (en inklusion $(X - Z, A - Z) \to (X, A)$ er en excision hvis homologigrupperne er isomorfe)
3. Introducér denne sætning: Vis, at for gode par (X, A) vil kvotientafbildningen $(X, A) \to (X/A, A/A)$ give en isomorfi i homologi $\tilde{H}_*(X/A) \simeq H_*(X, A)$
4. Find homologigrupperne for S^n