Analyse 1, Prøve 2

Sættet består af 4 opgaver og er på 2 sider. Desuden er vedhæftet en forside til besvarelsen, som bedes omhyggeligt udfyldt.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift.
Aflevering i to eksemplarer på IMFs sekretariat i E-bygningen, 1. sal, lokale 04.1.03, skal ske senest mandag den 25. maj kl. 12.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering og argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum (også gerne opgaver regnet ved øvelserne). Prøven dækker materialet i TL 8.1-6, 9.1-2, 9.5, 11.3, 12.1-4, herunder stillede opgaver og tilføjelser til TL. En fyldestgørende besvarelse af denne opgave vil kunne gives på ca. 5 håndskrevne A4-sider. Den omtrentlige relative vægtning af delopgaverne er som angivet.

Opgave 1 (50%)

Bestem for hver af følgende 5 rækker om den er divergent, betinget konvergent eller absolut konvergent. Husk at argumentere for din konklusion.

(a) (10%) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2+1)5^{-n}$

(b) (10%) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!2^{-n}$

(c) (10%) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+\ln(n)}}$

(d) (10%) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cos(\pi n^{-1})+6n^{-1}\right)^n$

(e) (10%) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2+5}\right)$

Opgave 2 (15%)

Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}n^{-1}-\sqrt{1+n^{-1}}\right)$$

har positive led og er konvergent.

Opgave 3 (25%)

(a) (15%) Lad (a_n) være en følge af reelle tal. Vis, at hvis rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$$

er konvergent, da er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent.

Vink: Man kan f.eks. vise og benytte uligheden $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ for alle reelle tal a, b.

(b) (10%) Giv et eksempel på en følge (a_n), så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, men rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ er divergent.

Opgave 4 (10%)

Lad

$$a_n = \int_n^{n+1} x^3 e^{-x} dx.$$

Vis at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent med sum 6.

Analyse 1, 2009

Prøve 2

Eksamensnummer: _______

Antal sider (inkl. forside): _____