Analyse 1, Prøve 3

Sættet består af 3 opgaver og er på 2 sider. Desuden er vedhæftet en forside til besvarelsen, som bedes omhyggeligt udfyldt.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift.
Aflevering i to eksemplarer på IMFs sekretariat i E-bygningen, 1. sal, lokale 04.1.03, skal ske senest mandag den 8. juni kl. 12.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering og argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum (også gerne opgaver regnet ved øvelserne). Prøven dækker materialet i TL 8.1-6, 9.1-2, 9.5, 11.3-4, 12.1-8, herunder stillede opgaver og tilføjelser til TL.
En fyldestgørende besvarelse af denne opgave vil kunne gives på ca. 5 håndskrevne A4-sider. Den omtrentlige relative vægtning af delopgaverne er som angivet.

Opgave 1 (30%)

(a) (10%) Bestem konvergensradius og sumfunktion for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}$$

(b) (10%) Bestem konvergensradius og sumfunktion for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$$

(c) (10%) Bestem summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{4^n}.$$

Opgave 2 (40%)

(a) (10%) Antag, at funktionsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis på et lukket og begrænset interval $[a, b]$ og uniformt på det åbne interval (a, b). Vis, at følgen konvergerer uniformt på hele $[a, b]$.

(b) (10%) Lad

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (\cos(\pi x))^{2n}}.$$

Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis på hele $\mathbb{R}$ og find grænsefunktionen.

(c) (10%) Vis, at funktionsfølgen fra (b) konvergerer uniformt på alle intervaller $[c, d]$ for $0 < c < d < 1$.

(d) (10%) Brug resultatet i spørgsmål (a) (også hvis du ikke har besvaret det) og resultatet i spørgsmål (b) til at konkludere, at funktionsfølgen fra (b) ikke konvergerer uniformt på det åbne interval $(0, 1)$.

Opgave 3 (30%)

(a) (10%) Vis, at hvis der findes en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med positiv konvergensradius $r > 0$, hvis sumfunktion $f(x)$ løser differentialligningen

$$f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) = 0, \tag{1}$$

for $x \in (-r, r)$, da er

$$a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+1}. \tag{2}$$

for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) (10%) Find sumfunktionen f til potensrækken der opfylder (2) og $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ og tjek, at den løser differentialligningen (1).

(c) (10%) Bestem konvergensradius for den potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, der opfylder (2) og $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Argumenter for at sumfunktionen opfylder differentialligningen (1). (Du skal ikke finde sumfunktionen.)

Analyse 1, 2009

Prøve 3

Eksamensnummer: _______

Antal sider (inkl. forside): _____