Analyse 1, Prøve 1

11. maj 2009

Alle henvisninger til TL er henvisninger til Kalkulus (2006, Tom Lindstrøm). Direkte opgavehenvisninger til Kalkulus er angivet med TLO, ellers er alle henvisninger til steder i de overordnede afsnit. Henvises der til en Note, er denne til "Tilføjelser og Rettelser til TL", og for Opgaver er det til de tilsvarende opgaver på ugesedlerne.

Opgave 1

(a)

Først vil det være på plads at definere en stamfunktion på et åbent, ubegrænset interval (thi definitionen TL s. 377 øverst ikke helt synes at række, da den kun dækker lukkede intervaller).

Definition 1 (Stamfunktion på åbent, ubegrænset interval)**.** *Vi siger, at en funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ er stamfunktion til $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (eller, at en funktion F er stamfunktion til f på (a,b)), hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$ og hvis F er kontinuert på (a,b). Vi tillader, at a og b kan være hhv. $-\infty$ og ∞.*

Nu viser vi et lille lemma:

Lemma 2. *Enhver konstant funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, er kontinuert.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. For givet $b \in \mathbb{R}$ skal vi finde et $\delta > 0$, så at når x ligger i definitionsmængden for f og $|x - b| < \delta$, er $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Men sætter vi $\delta = \varepsilon$, har vi da, at $|f(x) - f(b)| = |a - a| = 0 < \delta = \varepsilon$. Når x ligger i definitionsmængden for f og $|x - b| < \delta$, har vi så, at $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, hvorpå f er kontinuert i b jf. TL 5.1.1. $\square$

Der skal findes en stamfunktion til funktionen

$$2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

på intervallet $(0, \infty)$.

Lad $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$. Vi vil undersøge funktionen $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.

Vi ved fra TL 6.1.3 (differentiation af elementære funktioner), at $(\sin(x))' = \cos(x)$, at $(x^2)' = 2x^1 = 2x$ og at $(1/x)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -1/x^2$, alle for $x \in (0,\infty)$. $F'(x)$ kan findes ved TL 6.1.4 (her benyttes (iv) og (i)) og TL 6.1.5. For alle $x \in (0,\infty)$ har vi da, at

$$\begin{aligned}
F'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right)' &\overset{\text{TL } 6.1.4(\text{iv})}{=} && x^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right)' + (x^2)'\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\\
&\overset{\text{TL } 6.1.5}{=} && x^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\left(\frac{\pi}{2x}\right)'\right) + 2x\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\\
&\overset{\text{TL } 6.1.4(\text{i})}{=} && x^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{x}\right)'\right) + 2x\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\\
&= && x^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) + 2x\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\\
&= && -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) + 2x\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\\
&= && f(x),
\end{aligned}$$

hvor vi undervejs benytter vores viden fra TL 6.1.3. Da er $F'(x) = f(x)$, og dette for alle $x \in (0,\infty)$.

Funktionerne $x \mapsto x^2$ og $x \mapsto \sin(x)$ er kontinuerte overalt hvor de er defineret jf. TL s. 214, altså i $\mathbb{R}$, samt funktionen $x \mapsto \frac{\pi}{2}$ jf. Lemma 2. Da funktionerne $x \mapsto 1$ og $x \mapsto x$ ligeledes er kontinuerte, er funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ kontinuert jf. TL 5.1.5, på $(0,\infty)$. Da er funktionen $x \mapsto \frac{\pi}{2x}$ kontinuert på $(0,\infty)$ jf. TL 5.1.5. Funktionen $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2x})$ er da kontinuert på $(0,\infty)$ jf. TL 5.1.7, hvorpå produktfunktionen $x \mapsto x^2\sin(\frac{\pi}{2x})$ er kontinuert jf. TL 5.1.5. Heraf ser vi, at F er kontinuert på $(0,\infty)$.

Da gælder pr. Definition 1, at F er en stamfunktion til f. Vi er altså kommet frem til, at en stamfunktion til

$$2x\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

på intervallet $(0,\infty)$ er

$$x^2\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$

(b)

Vi skal vise integrabilitet for funktionen $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, idet h er givet ved

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,\frac{1}{2})\\ 2, & x = \frac{1}{2}\\ 2-x, & x \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Først vil vi vise, at h er begrænset.

Der gælder for alle $x \in [0,\frac{1}{2})$, at $|h(x)| = |x| = x < \frac{1}{2} \leq 2$ (da $|x| = x$ for $x \geq 0$); for $x = \frac{1}{2}$ gælder, at $|h(x)| = 2 \leq 2$, og for $x \in (\frac{1}{2},1]$ gælder, at $|h(x)| = |2-x| = 2-x \leq 2$ (da $2-x \geq 0$ for $x \in (\frac{1}{2},1]$).

Da har vi, at $|h(x)| \leq 2$ for alle $x \in [0,1]$, hvorpå h er begrænset jf. TL 5.4.1, da vi har fundet et reelt tal $M = 2$, så $|h(x)| \leq M$ for alle $x \in [0,1]$.

Vi lader først funktionerne h_1 og h_2 været givet ved

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2, & x = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{og} \\ h_2(x) &= \begin{cases} 2, & x = \frac{1}{2} \\ 2 - x, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Lad endvidere f_1 og f_2 være givet ved

$$f_1(x) = x,\ x \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad \text{og} \quad f_2(x) = 2 - x,\ x \in [\tfrac{1}{2}, 1].$$

f_1 og f_2 er hhv. voksende og aftagende, idet $x_1 < x_2 \Rightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2)$ for $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ og $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 2 - x_1 = f_2(x_1) > f_2(x_2) = 2 - x_2$ for $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$, hvorpå de er monotone og integrable jf. TL 8.2.3.

Differensfunktionerne $h_1 - f_1$ og $h_2 - f_2$ er integrable jf. Opgave C a), idet

$$\begin{aligned} (h_1 - f_1)(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2 - x, & x = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{og} \\ (h_2 - f_2)(x) &= \begin{cases} x, & x = \frac{1}{2} \\ 0, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

og vi derpå har at mængderne $A = \{x \in [0, \frac{1}{2}] | (h_1 - f_1)(x) \neq 0\} = \{\frac{1}{2}\}$ og $B = \{x \in [\frac{1}{2}, 1] | (h_2 - f_2)(x) \neq 0\} = \{\frac{1}{2}\}$ er endelige.

Men da er $h_1 = f_1 + (h_1 - f_1)$ og $h_2 = f_2 + (h_2 - f_2)$ integrable jf. TL 8.5.5(ii). Idet $h_1(x) = h(x)$ for alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$, og h_1 er integrabel på $[0, \frac{1}{2}]$, må h også være integrabel på $[0, \frac{1}{2}]$, da h_1 blot er en indskrænkning af h på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$.

Det indses ligeledes, at h er integrabel på $[\frac{1}{2}, 1]$, da h_2 er integrabel, og $h_2(x) = h(x)$ for alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Da h er integrabel på $[0, \frac{1}{2}]$ og $[\frac{1}{2}, 1]$, gælder pr. Note 2 (Indskudsreglen, version 1), da h er begrænset og $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, at h er integrabel på hele intervallet $[0, 1]$, og dermed at h er integrabel.

Da eksisterer $\int_0^1 h(x)\,dx$, og kan bestemmes idet vi benytter Note 2 (Indskudsreglen, version 2), da h er integrabel på et afsluttet og begrænset interval $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 h_2(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2(x)\,dx, \end{aligned}$$

hvilket følger af, at

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f_1(x) + (h_1 - f_1)(x))\,dx \\ &\overset{\text{TL 8.5.5(ii)}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (h_1 - f_1)(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx, \end{aligned}$$

idet vi benytter TL 8.5.5(ii) samt. Opgave C a) på integralet $\int_0^{\frac{1}{2}}(h_1 - f_1)(x)\,dx$. Samme indses for h_2 og f_2, hvorpå vi altså har, at

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-x)\,dx.$$

Idet $x \mapsto 2$ og $x \mapsto x$ er kontinuerte funktioner, er også $x \mapsto 2-x$ en kontinuert funktion, jf. TL 5.1.5.

Funktionen $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ er en stamfunktion til f_1 på $[0, \frac{1}{2}]$ jf. TL s. 377 øverst, idet $F_1'(x) = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f_1(x)$ for $x \in (0, \frac{1}{2})$ jf. TL 6.1.3 og TL 6.1.4(i), og da F_1 er kontinuert på $[0, \frac{1}{2}]$ jf. TL 5.1.5, idet funktionerne $x \mapsto \frac{1}{2}$ og $x \mapsto x^2$ er kontinuerte på $[0, \frac{1}{2}]$ jf. Lemma 2 fra delspørgsmål 1(a) og TL s. 214.

Funktionen $F_2(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ er en stamfunktion til f_2 på $[\frac{1}{2}, 1]$ jf. TL s. 377, idet $F_2'(x) = (2x - \frac{1}{2}x^2)' = (2x)' - (\frac{1}{2}x^2)' = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2x = 2 - x = f_2(x)$ for $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ jf. TL 6.1.3 og TL 6.1.4(iii), og da F_2 er kontinuert på $[\frac{1}{2}, 1]$ jf. TL 5.1.5, idet funktionerne $x \mapsto 2$, $x \mapsto \frac{1}{2}$, $x \mapsto x$ og $x \mapsto x^2$ er kontinuerte jf. Lemma 2 fra delspørgsmål 1(a) og TL s. 214.

Da gælder ved TL 8.3.4, da $x \mapsto x$ og $x \mapsto 2 - x$ er kontinuerte, at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) - \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{3}{2} - \frac{7}{8} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(c)

Der skal vises, at en begrænset funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, der er integrabel på alle delintervaller $[c, b]$ for alle $c \in (a, b)$ er integrabel på intervallet $[a, b]$, og at

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bevis. Antag, at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er begrænset og integrabel på alle delintervaller $[c, b]$ for alle $c \in (a, b)$. Der gælder pr. TL 8.3.1, da f er begrænset, at

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \quad \text{og} \\
\underline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Da f er begrænset, er begge venstresider altså klart definerede og eksisterer (som værdier i $\mathbb{R}$). Eftersom ovenstående gælder, kan vi også tage grænseværdien for c gående imod a fra højre på begge sider: på venstresiderne er tallet ikke afhængigt af c på nogen måde, da a og b er holdt fast. Imidlertid kan vi ikke umiddelbart sige, at højresiderne på samme måde er upåvirkede (da begge leds værdier afhænger af c), og vi får:

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \lim_{c\to a^+}\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx\right) \quad \text{og} \\
\underline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \lim_{c\to a^+}\left(\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right)
\end{aligned}$$

Her kunne man frygte, at udtrykkene på højresiderne ikke eksisterede, men da venstresiderne eksisterer, eksisterer højresiderne også (som værdier i $\mathbb{R}$).

Da vi har, at

$$\lim_{c\to a^+} \underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx = 0,$$

jf. bemærkningen på TL s. 376 midten, må $\lim_{c\to a^+} \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$ og $\lim_{c\to a^+} \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$ også eksistere, idet vi har pr. TL 5.4.3(ii), at

$$\begin{aligned}
& \lim_{c\to a^+}\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.\right) - \lim_{c\to a^+} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx \\
\overset{\text{TL 5.4.3(ii)}}{=} & \lim_{c\to a^+}\left(\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.\right) - \overline{\int_a^c} f(x)\,dx\right) \\
= & \lim_{c\to a^+} \overline{\int_c^b} f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

hvorpå sidste grænseværdi eksisterer (samme kan udføres for underintegralet). Vi har altså jf. TL 5.4.5(i), at

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \lim_{c\to a^+} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \lim_{c\to a^+} \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = 0 + \lim_{c\to a^+} \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \quad \text{og} \\
\underline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \lim_{c\to a^+} \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \lim_{c\to a^+} \underline{\int_c^b} f(x)\,dx = 0 + \lim_{c\to a^+} \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Men da f var integrabel på $[c, b]$ for alle $c \in (a, b)$, må der altså gælde, at $\overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$ for alle $c \in (a, b)$, hvormed

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \underline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

hvorpå f jf. TL 8.2.1 er integrabel på $[a, b]$, da overintegralet for f over $[a, b]$ ses at være lig underintegralet for samme. Da ser vi, idet $\overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$

for alle $c \in (a,b)$ (jf. TL 8.2.1, idet f for alle $c \in (a,b)$ var integrabel på $[c,b]$), at

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx,$$

hvilket var hvad ønskedes vist, idet vi brugte TL 8.2.1 ved første lighedstegn, idet f er integrabel på $[a,b]$. $\square$

(d)

Vi betragter funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right), & x \in (0,1] \end{cases}$$

og lader h være funktionen fra delspørgsmål (b).

Der skal argumenteres for at $g + h$ er integrabel.

Vi vil vise, at g er integrabel på $[0,1]$. Vi vil derfor først vurdere $|2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)|$ for $x \in (0,1]$:

$$\begin{aligned}
\left|2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right| &= \left|2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right)\right| \\
&\overset{\text{TL 2.1.1}}{\leq} \left|2x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right| + \left|-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right| \\
&= 2|x|\left|\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right| + \frac{\pi}{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right| \\
&\overset{\otimes}{\leq} 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 1 \\
&< 4,
\end{aligned}$$

hvor vi ved $\otimes$ benyttede, at $|x| \leq 1$ for alle $x \in (0,1]$ og $|\sin(y)| \leq 1$ samt $|\cos(y)| \leq 1$ for alle $y \in (0,\infty)$, og til allersidst benyttede, at $\frac{\pi}{2} < 2$.

Da også $0 < 4$, kan vi konkludere ved TL 5.3.1, at g er begrænset, idet $|g(x)| < 4$ for alle $x \in [0,1]$.

Vores strategi er ret klar nu; vi vil benytte resultatet fra delspørgsmål 1(c) til at vise, at g er integrabel. Men da kræves først, at g er integrabel på alle delintervaller $[c,1]$, hvor $c \in (0,1)$.

Kan vi dog vise, at g er kontinuert på et vilkårligt delinterval $[c,1]$, kan vi benytte Analysens Fundamentalsætning, TL 8.3.3, som da siger, at g vil være integrabel på dette delinterval.

Lad derfor et $c \in (0,1)$ være givet. Funktionerne $x \mapsto 1$, $x \mapsto 2$, $x \mapsto \frac{\pi}{2}$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ er kontinuerte for alle $x \in \mathbb{R}$ jf. Lemma 2 fra delspørgsmål 1(a) og TL s. 214. Da $x \mapsto 1$ og $x \mapsto x$ er kontinuerte, er funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ kontinuert for $x > 0$, hvorpå funktionen $x \mapsto \frac{\pi}{2x}$ er kontinuert for $x > 0$ jf. TL 5.1.5. Da er funktionerne $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2x})$ og $x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2x})$ kontinuerte for $x > 0$ jf. TL 5.1.7, idet sin og cos er kontinuerte på hele $\mathbb{R}$. Men da er funktionerne $x \mapsto 2x\sin(\frac{\pi}{2x})$ og $x \mapsto \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2x})$ jf. TL 5.1.5 for $x > 0$, og differensen af disse, $x \mapsto 2x\sin(\frac{\pi}{2x}) - \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2x})$ er jf. TL 5.1.5 kontinuert for $x > 0$.

Da $c > 0$, er funktionen derfor kontinuert på intervallet $[c, 1]$, og derfor integrabel på dette jf. TL 8.3.3. Men da er funktionen integrabel på $[c, 1]$ for alle $c \in (0, 1)$, og pr. delspørgsmål 1(c) får vi, at g er integrabel på $[0, 1]$.

Derfor gælder jf. TL 8.5.5(ii), at sumfunktionen $g + h$ også er integrabel, da vi fandt i delspørgsmål 1(b), at h var integrabel.

Integralet

$$\int_0^1 (g(x) + h(x))\, dx$$

skal desuden bestemmes. Vi har jf. TL 8.5.5(ii), at

$$\int_0^1 (g(x) + h(x))\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx + \int_0^1 h(x)\, dx.$$

Nu genstår det bare at vise værdien af begge integraler.

Da vi ved fra (a), at $x^2 \sin(\frac{\pi}{2x})$ er en stamfunktion på alle lukkede intervaller $[c, 1]$, hvor $c > 0$, til $2x \sin(\frac{\pi}{2x}) - \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2x})$ (idet betingelserne for at være en stamfunktion jf. TL s. 377 øverst også er opfyldt her; grunden til overvejelsen er selvfølgelig det lukkede interval $[c, 1]$), ved vi jf. TL 8.3.4, at for $c > 0$ er

$$\int_c^1 g(x)\, dx = \left[x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right]_c^1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right) = 1 - c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right).$$

Vi vil vise, at $\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 g(x)\, dx = \lim_{c \to 0^+} \left[1 - c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right)\right] = 1$.

Lad derfor $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal finde et $\delta > 0$, så $|1 - c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right) - 1| < \varepsilon$ for alle c, som opfylder, at $0 < c < \delta$. Lad derfor $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ og $0 < c < \delta$; da får vi, at

$$\left|1 - c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right) - 1\right| = \left|-c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right)\right| = |c^2| \left|\sin\left(\frac{\pi}{2c}\right)\right| \leq c^2 < \delta^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon,$$

idet sin kun antager værdier i intervallet fra -1 til 1 og da $c^2 < \delta^2$ jf. antagelsen om vores c. Altså har vi for alle c, som opfylder, at $0 < c < \delta$, at $|1 - c^2 \sin\left(\frac{\pi}{2c}\right) - 1| < \varepsilon$, hvor vi har det ønskede jf. TL 5.4.5.

Altså har vi jf. resultaterne i delspørgsmål 1(b) og 1(c), at

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g(x) + h(x))\, dx &= \int_0^1 g(x)\, dx + \int_0^1 h(x)\, dx \\ &= \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 g(x)\, dx + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Opgave 2

(a)

Uden at benytte stamfunktioner skal der argumenteres for, at

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Lad funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Idet enhedscirklens ligning er $x^2 + y^2 = 1$, kan vi isolere y i denne: vi får herpå, at $y^2 = 1 - x^2$, dvs. $|y| = \sqrt{1-x^2}$. Det står klart, at $|x| \leq 1$ og $|y| \leq 1$, for at de kan opfylde ligningen (thi ellers må summen af kvadraterne være større end 1, hvorpå de ikke gør det).

Lader vi $y \geq 0$, får vi da, at $|y| = y$, og endelig, at $y = \sqrt{1-x^2}$.

Vi foretager altså en indskrænkning af de værdier, som x og y kunne antage; lod vi først $y \geq 0$, giver denne nye ligning i hvert fald ikke hele enhedscirklen, men kun den "øvre" del i 1. og 2. kvadrant (dette ses også, idet udtrykket $\sqrt{1-x^2}$ ikke antager negative værdier i $\mathbb{R}$) – da arealet af enhedscirklen, som har radius 1, er $\pi \cdot 1^2 = \pi$, er arealet af denne (øvre) halve enhedscirkel naturligvis $\frac{\pi}{2}$, da vi har skåret halvdelen af cirklen fra.

Lader vi derpå $x \geq 0$, får vi derpå en kvartcirkel i 1. kvadrant, hvis areal da er den halve enhedscirkels halverede, nemlig $\frac{\pi}{4}$. Med denne indskrænkning fås netop, at det givne $y = \sqrt{1-x^2}$ i ligningen er lig $f(x)$, idet vi lod f være defineret på $[0,1]$.

Idet vi kigger på to givne x_1, x_2, så $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, gælder, at

$$\begin{aligned}
0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq x_1^2 < x_2^2 \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad -1 \leq -x_2^2 < -x_1^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq 1 - x_2^2 < 1 - x_1^2 \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt{1-x_2^2} < \sqrt{1-x_1^2} \leq 1,
\end{aligned}$$

da kvadratrodsfunktionen er voksende. Vi ser altså her, at for alle $0 \leq x \leq 1$ er $f(x) \geq 0$, altså positiv, samt at f er begrænset og monotont aftagende. Da er f integrabel jf. TL 8.2.3.

Arealet begrænset af grafen for f, x-aksen og y-aksen er da jf. TL 8.6.1 givet ved $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, men da dette areal netop er arealet af den omtalte kvartcirkel, er $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

(b)

Der skal argumenteres for, at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Vi vil lave en Riemann-sum for funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Vores inddeling til denne Riemann-sum skal være en ligeinddeling i n lige store dele af $[0,1]$, så vores inddeling er altså på formen

$$\Pi_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}, x_n = 1\right\},$$

således at $x_k = \frac{k}{n}$. Vi har altså sørget for, at $x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$ for alle hele tal $1 \leq k \leq n$.

Vi laver nu et udvalg $U_n = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, således at $c_k = x_k = \frac{k}{n}$. Det er let at se, at dette udvalg opfylder betingelserne for at være et udvalg, idet $c_k = x_k \in [x_{k-1}, x_k]$ for alle $1 \leq k \leq n$, jf. TL s. 389 midten.

Vores Riemann-sum $R(\Pi_n, U_n)$ er da jf. TL 8.5.1 givet ved

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Vi havde med Π_n sørget for, at $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$; da $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right)$, har vi så, at

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Dette kan omskrives:

$$\begin{aligned} R(\Pi_n, U_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} &&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n^2 - k^2}{n^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{\sqrt{n^2}} &&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{|n|} &&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}, \end{aligned}$$

idet $n > 0$, da dette var antallet af delintervaller, hvilket selvfølgelig er positivt.

Idet alle delintervaller har samme længde $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, vil maskebredden $|\Pi_n| = \frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$, jf. en bemærkning i TL 4.3.4. Vi har altså valgt vores inddeling Π_n og udvalg U_n, så $|\Pi_n| \to 0$. Men da har vi ved TL 8.5.4, at

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2},$$

hvilket var, hvad vi ønskede at vise.

(c)

Vi skal vise, at der for alle hele tal $n \geq 1$ gælder vurderingerne

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Vi lavede i (b) en inddeling $\Pi_n = \{0 = x_0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\}$ af det lukkede interval [0,1]. Med funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ har vi for denne inddeling jf. beviset for TL 8.2.4 (og idet vi jo ved, at f er integrabel), at

$$N(\Pi_n) \leq \int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \leq Ø(\Pi_n). \tag{1}$$

Det ovenstående giver selvfølgelig kun mening for hele tal $n \geq 1$, idet n er antallet af delintervaller, som naturligvis er helt og positivt – det er underforstået i det følgende.

Vi vil nu finde $N(\Pi_n)$ og $\O(\Pi_n)$, hvilket kun er muligt, idet f er begrænset, jf. TL s. 364.

Da vi fandt i delspørgsmål 2(a), at f var monotont aftagende, vil der for alle $1 \leq k \leq n$ og for alle $d_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gælde, at $x_{k-1} \leq d_k \leq x_k \Rightarrow f(x_{k-1}) \geq f(d_k) \geq f(x_k)$.

Idet vi som når vi definerer under- og oversummen sætter $M_k = \sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ og $m_k = \inf\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, er altså gældende i dette tilfælde, at $M_k = f(x_{k-1})$ og $m_k = f(x_k)$, da disse sup og inf for ovenstående lukkede intervaller ligger i intervallerne selv.

Vi har nu pr. definition på undersum $N(\Pi_n)$ og oversum $\O(\Pi_n)$, jf. TL s. 366, idet vi i Π_n sørgede for, at $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ og at $x_k = \frac{k}{n}$, at

$$\begin{aligned}
\O(\Pi_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2}, \quad \text{og} \\
N(\Pi_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Vi indfører nu det udvalg U_n, som vi benyttede i delspørgsmål 2(b). Med dette fandt vi, at Riemann-summen $R(\Pi_n, U_n)$ var givet ved

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}.$$

Dette udtryk kan vi trække fra på alle sider af ulighedstegnene i (1), hvorpå vi får, at

$$N(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n) \leq \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} \leq \O(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n). \tag{2}$$

Nu ser vi, at

$$N(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = 0,$$

og at

$$\O(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Idet vi substituerer summationsindices $m = k - 1$ i den første sum og derpå vælger at skifte index tilbage til k (evt. jf. TL s. 31 nederst), får vi derpå, at

$$\begin{aligned}
Ø(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n) &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} - \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2} \\
&= \frac{1}{n}\sqrt{1-0} - \frac{1}{n}\sqrt{1-1} \\
&= \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

idet vi ved tredje lighedstegn lader en masse led gå ud med hinanden, da udtrykkene under sumtegnene er ens. Idet vi nu har bestemt $N(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n)$ og $Ø(\Pi_n) - R(\Pi_n, U_n)$, får vi, når vi kobler dette ind i (2), at

$$0 \le \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} \le \frac{1}{n},$$

for alle hele tal $n \ge 1$, hvilket var hvad ønskedes vist. Vi kan altså vurdere $\frac{\pi}{4}$ med en afvigelse på under $\frac{1}{n}$ ud fra sumudtrykket

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}.$$

Opgave 3

Først et lemma:

Lemma 3. *Enhver konstant funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, har grænseværdi a for $x \to \infty$.*

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal jf. TL 5.4.10 finde et $N \in \mathbb{R}$, så $|f(x) - a| < \varepsilon$ for alle $x \ge N$. Men da kan vi vælge $N = \varepsilon$, således, at $|f(x) - a| = |a - a| = 0 < N = \varepsilon$, da $N > 0$. Da vil gælde, at $|f(x) - a| < \varepsilon$ for alle $x \ge N$. Altså er $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ jf. TL 5.4.10. □

Der skal afgøres om integralet

$$\int_1^\infty (e^{-x} + x)^{-1}\, dx$$

er konvergent eller divergent.

Vi har først og fremmest for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, at $x_1 \le x_2 \Rightarrow -x_1 \le -x_2$. Idet e^x er en voksende funktion, kan vi konkludere, at $-x_2 \le -x_1 \Rightarrow e^{-x_2} \le e^{-x_1}$, og altså overordnet, at $x_1 \leq x_2 \Rightarrow e^{-x_1} \geq e^{-x_2}$, hvorpå vi ser, at e^{-x} er en aftagende funktion på hele $\mathbb{R}$.

Der vil altså gælde, da $0 \leq 1$, at $e^{-1} \leq e^{-0} = 1$.

Da e^{-x} er en aftagende funktion, gælder for $1 \leq x$, at $e^{-1} \geq e^{-x}$.

For $1 \leq x$ gælder altså, at

$$e^{-x} \leq e^{-1} \leq 1 \leq x,$$

idet vi jo undersøger for $1 \leq x$. For samme vil ligeledes gælde, at $e^{-x} + x \leq x + x = 2x$, idet vi blot lægger samme tal x til på begge sider af ulighedstegnet.

Ganger vi da over kors, får vi endeligt, at $(2x)^{-1} \leq (e^{-x} + x)^{-1}$ for $x \geq 1$.

Lad nu $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, hvor f er givet ved $f(x) = (e^{-x} + x)^{-1}$, og g ved $g(x) = (2x)^{-1}$.

Idet $x > 0$ for alle $x \geq 1$, er $2x > 0$, hvorpå $g(x) = (2x)^{-1} > 0$ for alle $x \geq 1$. g er altså positiv.

Da funktionerne $x \mapsto 2$ og $x \mapsto x$ er kontinuerte jf. TL s. 214 og Lemma 2, er funktionen $x \mapsto 2x$ også kontinuert jf. TL 5.1.5. Da funktionerne $x \mapsto x$ og $x \mapsto 1$ er kontinuerte (sidste jf. Lemma 2 fra 1(a)), er funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ kontinuert jf. TL 5.1.5, da $x \geq 1 > 0$. Men da er $x \mapsto (2x)^{-1}$ og dermed g kontinuert jf. TL 5.1.7, da $2x \geq 2 > 0$.

Idet $x > 0$ og $e^{-x} > 0$ for alle $x \geq 1$, er summen $e^{-x} + x$ og dens reciprokke $(e^{-x} + x)^{-1}$ ligeledes større end 0 for $x \geq 1$, hvorpå $f(x) > 0$ for $x \geq 1$; f er altså positiv.

Idet funktionen $x \mapsto x$ er kontinuert, er $x \mapsto -x$ kontinuert jf. TL 5.1.5, idet denne er differensen af den konstante funktion $x \mapsto 0$, som er kontinuert, og $x \mapsto x$. Da funktionen $x \mapsto e^x$ er kontinuert jf. TL s. 214, er den sammensatte funktion $x \mapsto e^{-x}$ også kontinuert jf. TL 5.1.7; funktionen $x \mapsto e^{-x} + x$ er da kontinuert jf. TL 5.1.5, hvorpå $x \mapsto (e^{-x} + x)^{-1}$ er kontinuert jf. TL 5.1.5, idet $x \mapsto 1$ er kontinuert jf. Lemma 2, og da $e^{-x} + x > 0$ for alle $x \geq 1$. Vi slutter heraf, at f altså også er kontinuert.

Vi har nu, at $f(x) = (e^{-x} + x)^{-1} \geq (2x)^{-1} = g(x)$ for alle $x \in [1, \infty)$. Da vi ligeledes har, at f og g er positive, kontinuerte funktioner, kan vi benytte sammenligningskriteriet, TL 9.5.11, på disse to!

Vi vil undersøge om $\int_1^\infty (2x)^{-1}\, dx$ divergerer. Sætter vi $f_1(x) = x^{-1}$, har vi, at $\int_1^\infty f_1(x)\, dx$ divergerer jf. TL 9.5.4. Da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

jf. Lemma 3 fra delspørgsmål 1(d), gælder pr. grænsesammenligningskriteriet, TL 9.5.13(ii), at også $\int_1^\infty g(x)\, dx = \int_1^\infty (2x)^{-1}\, dx$ divergerer.

Da altså $\int_1^\infty (2x)^{-1}\, dx$ er divergent, gælder jf. sammenligningskriteriet, TL 9.5.11(ii), at integralet

$$\int_1^\infty (e^{-x} + x)^{-1}\, dx$$

er divergent.