An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

9. december 2009

Vi husker, at det ortogonale komplement $\mathcal{N}^\perp$ af en delmængde $\mathcal{N}$ af et Hilbert-rum $\mathcal{H}$ defineres ved $\mathcal{N}^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid (x, y) = 0 \,\forall y \in \mathcal{N}\}$.

Exercise 5

Lad $\mathcal{N}$ være et underrum af et Hilbert-rum $\mathcal{H}$. Der gælder:

(i) $\mathcal{N}^\perp = \overline{\mathcal{N}}^\perp$;

(ii) *$\mathcal{N}$ er tæt i $\mathcal{H}$ ($\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{H}$), hvis og kun hvis $\mathcal{N}^\perp = \{0\}$;*

(iii) $(\mathcal{N}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{N}}$.

Bevis. ***(i)*** Vi viser ved inklusioner:

$\subseteq$: Lad $x \in \mathcal{N}^\perp$. Vi vil vise, at $(x, y) = 0$ for alle $y \in \overline{\mathcal{N}}$.

Lad derfor $y \in \overline{\mathcal{N}}$ være givet. Da findes en punktfølge (y_n) i $\mathcal{N}$, så $y_n \to y$ i $\mathcal{H}$ for $n \to \infty$. Da det indre produkt i $\mathcal{H}$ er en kontinuert afbildning $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ jf. NY 2.6, fås for det indre produkt (x, y), at

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

hvor andet lighedstegn kommer af, at $x \in \mathcal{N}^\perp$, hvormed $(x, z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{N}$; da $y_n \in \mathcal{N}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder altså også $(x, y_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Altså vil $(x, y) = 0$ for alle $y \in \overline{\mathcal{N}}$, hvormed $x \in \overline{\mathcal{N}}^\perp$.

$\supseteq$: Lad $x \in \overline{\mathcal{N}}^\perp$; da gælder, at $(x, y) = 0$ for alle $y \in \overline{\mathcal{N}}$, og dermed specielt for alle $y \in \mathcal{N}$, hvormed $x \in \mathcal{N}^\perp$.

(ii) Antag, at $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{H}$; pr. ***(i)*** gælder, at $\mathcal{N}^\perp = \overline{\mathcal{N}}^\perp = \mathcal{H}^\perp$, idet vi ser af definitionen på $^\perp$, at $A = B \subseteq \mathcal{H}$ medfører $A^\perp = B^\perp$.

Lad $x \in \mathcal{H}^\perp$. Da gælder, at $(x, y) = 0 = (0, y)$ for alle $y \in \mathcal{H}$ jf. NY 1.5(iii). Pr. NY 1.5(iv) fås dermed, at $x = 0$, så $\mathcal{H}^\perp \subseteq \{0\}$. Da $(0, y) = 0$ for alle $y \in \mathcal{H}$, har vi omvendt, at $\{0\} \subseteq \mathcal{H}^\perp$, så $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$, hvormed $\mathcal{N}^\perp = \{0\}$.

Antag omvendt, at $\mathcal{N}^\perp = \{0\}$. Da er $\mathcal{H} = \{0\}^\perp = (\mathcal{N}^\perp)^\perp = (\overline{\mathcal{N}}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{N}}$ ved ***(i)*** og NY 4.25, og $\mathcal{N}$ er tæt i $\mathcal{H}$.

(iii) Afslutningen $\overline{\mathcal{N}}$ af $\mathcal{N}$ er (stadig) et lukket underrum af Hilbert-rummet $\mathcal{H}$ jf. NY 2.9.

Da gælder jf. NY 4.25, at $(\mathcal{N}^\perp)^\perp = (\overline{\mathcal{N}}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{N}}$. $\square$