An2 2009-10

Rasmus Sylvester Bryder

13. januar 2010

Jeg bruger i denne opgave NY 7.6 og NY 7.13 til endeløshed. Jeg tillader mig ikke at nævne, når jeg bruger dem.

Exercise 13

Lad E, F, G og $\mathcal{H}$ være Hilbert-rum og $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Der gælder, at

(1) hvis $A \in \mathscr{L}(E, F)$, $B \in \mathscr{L}(F, G)$, er $(BA)^* = A^* B^*$;
(2) hvis $A, B \in \mathscr{L}(E, F)$, gælder $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$;
(3) hvis $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, at A er invertibel hvis og kun hvis A^* er invertibel, i hvilket tilfælde $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Bevis. (1): Da $AB \in \mathscr{L}(E, G)$, vil $(BA)^* \in \mathscr{L}(G, E)$, og der gælder for $x \in E$ og $y \in G$, at

$$(BAx, y)_G = (Ax, B^* y)_F = (x, A^* B^* y)_E,$$

men da den adjungerede operator til BA er entydigt bestemt, må $(BA)^* = A^* B^*$.

(2): Der vil også gælde, at $\lambda A + \mu B \in \mathscr{L}(E, F)$, thi $\mathscr{L}(E, F)$ er et vektorrum. Der gælder nu for $x \in E$ og $y \in F$ med vektorrumsoperationer, at

$$\begin{aligned}
(x, (\lambda A + \mu B)^* y)_E &= ((\lambda A + \mu B)x, y)_F \\
&= ((\lambda A)x + (\mu B)x, y)_F \\
&= (\lambda Ax + \mu Bx, y)_F \\
&= (\lambda Ax, y)_F + (\mu Bx, y)_F \\
&= (Ax, \overline{\lambda} y)_F + (Bx, \overline{\mu} y)_F \\
&= (x, A^*(\overline{\lambda} y))_E + (x, B^*(\overline{\mu} y))_E \\
&= (x, \overline{\lambda} A^* y)_E + (x, \overline{\mu} B^* y)_E \\
&= (x, \overline{\lambda} A^* y + \overline{\mu} B^* y)_E \\
&= (x, (\overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*) y)_E,
\end{aligned}$$

hvormed entydighed igen giver det ønskede. Vi brugte i det ovenstående linearitet af A^* og B^*, samt almindelige regneregler for indre produkt.

(3): Antag, at A er invertibel. Da gælder, at $A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, hvormed $(A^{-1})^* \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Vi har for $x, y \in \mathcal{H}$, at

$$\begin{aligned}(A^{-1}x, y)_{\mathcal{H}} &= (x, (A^{-1})^* y)_{\mathcal{H}} \\ &= (AA^{-1}x, (A^{-1})^* y)_{\mathcal{H}} \\ &= (A^{-1}x, A^*(A^{-1})^* y)_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

hvormed $y = A^*(A^{-1})^* y$ for alle $y \in \mathcal{H}$. Omvendt gælder, at

$$\begin{aligned}(Ax, y)_{\mathcal{H}} &= (x, A^* y)_{\mathcal{H}} \\ &= (A^{-1}Ax, A^* y)_{\mathcal{H}} \\ &= (Ax, (A^{-1})^* A^* y)_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

og altså $y = (A^{-1})^* A^* y$. Da vi endvidere har, at $(A^{-1})^* \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, eksisterer $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, så $1_{\mathcal{H}} = BA^* = A^*B$, nemlig $B = (A^{-1})^*$. A^* er dermed invertibel.

Vi har altså vist generelt, at hvis en afbildning i $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ er invertibel, da er dens adjungerede det. Er A^* invertibel, er $A^{**} = A$ det også. Dermed gælder ækvivalensen.

Hvis A og/eller A^* er invertible, får vi af ovenstående, at den inverse til A^* er $(A^{-1})^*$, og dermed $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. $\square$