Dis1 2008-09
Ugeopgave 3

Rasmus Sylvester Bryder

27. februar 2009

1 F08 opgave 2

Der defineres ved $x \mapsto 5x + 3$ en bijektiv afbildning $\sigma : \mathbb{Z}/9 \to \mathbb{Z}/9$. Vi har at $\sigma \in S_9$, idet vi opfatter tallene fra 1 til 9 som restklasser modulo 9.

a) Idet $5 \cdot 1 + 3 = 8 \equiv 8 = \sigma(1) \pmod 9$, $5 \cdot 2 + 3 = 13 \equiv 4 = \sigma(2) \pmod 9$ og så fremdeles, kan vi angive σ i tabelnotationen således:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Vi ser ved permutationen, at når vi følger billederne i permutationen til deres billeder, får vi, at banerne i σ er givet ved $1 \mapsto 8 \mapsto 7 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 1$, $3 \mapsto 9 \mapsto 3$ og $6 \mapsto 6$. Dermed kan cykelfremstillingen for σ angives som følgende:

$$\sigma = (1\ 8\ 7\ 2\ 4\ 5)(3\ 9)(6),$$

da disse 3 cykler er disjunkte. Der er altså 3 baner i σ, og da der er 9 elementer i den endelige mængde vi arbejder i (tallene fra 1 til 9), er fortegnet for σ da $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{9-3} = (-1)^6 = 1$.

c) Cykelfremstillingen for σ^2 angives ved at placere to styks σ ved siden af hinanden og dernæst fra højre finde alle baner. Altså,

$$\sigma^2 = (1\ 8\ 7\ 2\ 4\ 5)(3\ 9)(6)(1\ 8\ 7\ 2\ 4\ 5)(3\ 9)(6),$$

og fra højre får vi, at $1 \mapsto 7$ (da vi har $1 \mapsto 8$ i 4. cykel, hvorpå $8 \mapsto 7$ i 1.), $7 \mapsto 4$ og $4 \mapsto 1$. Altså har vi fundet vores første bane, og den tilsvarende cykel er $(1\ 7\ 4)$. De resterende baner fås ved $2 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 2$, $3 \mapsto 3$, $6 \mapsto 6$ og $9 \mapsto 9$. Altså er cykelfremstillingen for σ^2 da

$$\sigma^2 = (1\ 7\ 4)(2\ 5\ 8)(3)(9)(6).$$

Fortegnet for σ^2 fås ved GRP(2.20): $\operatorname{sign}(\sigma^2) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma) = 1 \cdot 1 = 1$.

2 F08 opgave 4

Der er i en terning med sidelængde 1 givet 28 punkter. Der skal vises, at der blandt punkterne findes to punkter hvis afstand er $\leq \sqrt{3}/3$.

Bemærkning. Den maksimale afstand mellem to punkter i en terning med sidelængde d kan findes ved at betragte to modsat placerede hjørner. Ser vi først på den maksimale afstand mellem to punkter på en af fladerne, er denne $\sqrt{d^2 + d^2} = \sqrt{2d^2}$, da vi skal finde længden af hypotenusen ved to kateter med længde d. Vi har nu en potentiel katete med længde $\sqrt{2d^2}$, og idet vi sørger for at vælge en passende kant med længde d så vi i sidste ende får afstanden mellem to modsat placerede hjørner, er denne lig $\sqrt{2d^2 + d^2} = \sqrt{3}d$, da vi ønsker længden på hypotenusen i den da retvinklede trekant mellem disse kateter. Den største afstand mellem to punkter i en terning med sidelængde d er da $\leq \sqrt{3}d$.

Bevis. Vi opdeler den givne terning med sidelængde 1 i 27 miniterninger med sidelængde $1/3$ – vi skærer terningen over i 3 lige store stykker på en led, disse 3 over i 9 på den anden, og de 9 over i 27 på den sidste.

I terningen var der 28 punkter; er der i en af de 27 miniterninger mindst to punkter, ved vi fra vores lille bemærkning at afstanden mellem disse maksimalt er $\sqrt{3} \cdot 1/3 = \sqrt{3}/3$, hvormed det ønskede er vist.

Kan vi da risikere at der kun er et punkt i hver miniterning? Nej, og dette indses ved skuffeprincippet. Idet vi ser de $m = 27$ miniterninger som skuffer, og vores $n = 28$ punkter som ting der skal placeres i skufferne, vil der jf. skuffeprincippet, da $n > m$, være mindst én skuffe hvor der er mindst to ting; oversat er der i hvert fald én miniterning hvori der er mindst to punkter, og afstanden mellem disse er altså maksimalt $\sqrt{3}/3$.

Men da denne i hvert fald éne miniterning jo var en del af den oprindelige terning med sidelængde 1, er der altså to punkter i denne store terning, hvor afstanden er $\leq \sqrt{3}/3$. **QED.**

3 Supplerende opgave 2

Vi betragter permutationerne

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan angive cykelfremstillingerne for σ og ρ ved at finde banerne; i σ har vi at $1 \mapsto 2 \mapsto 1$ og $3 \mapsto 4 \mapsto 3$, hvor vi i ρ har at $1 \mapsto 4 \mapsto 1$ og $2 \mapsto 3 \mapsto 2$.

Vi har, at $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ og $\rho = (1\ 4)(2\ 3)$, hvormed det ses, at de to permutationer har samme cykeltype 2^2.

Der skal nu findes en permutation $\mu \in S_4$ så $\sigma = \mu\rho\mu^{-1}$. Vi vil derfor forsøge at finde en 4-cykel $\mu = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$, så

$$(1\ 2)(3\ 4) = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)(1\ 4)(2\ 3)(a_1\ a_4\ a_3\ a_2).$$

Rasmus prøver sig frem. Vi skal have at $1 \mapsto 2$ på højresiden, som i σ. Vi prøver at sætte $a_4 = 2$ og $a_3 = 1$ i μ; så skal der i μ^{-1} bare sørges for, at $1 \mapsto 4$, dvs. at $a_2 = 4$. Da er a_1 tilovers, så $a_1 = 3$ og $\mu = (3\ 4\ 1\ 2)$. Vi ser, at

$$(1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4\ 1\ 2)(1\ 4)(2\ 3)(3\ 2\ 1\ 4)$$

heldigvis passer meget godt! Da er μ's 4-cykel givet ved banen $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1$, så $\mu = (2, 3, 4, 1)$ i direkte notation.