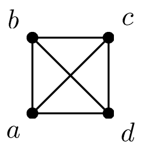
Dis1 2008-09
Ugeopgave 4

Rasmus Sylvester Bryder

6. marts 2009

1 Supplerende opgave fra ugeseddel 4

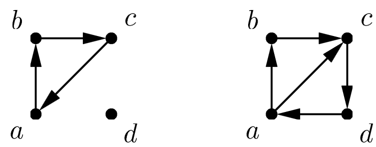


K_4

Der skal bestemmes om K_4 indeholder følgende:

1. *En vandring, som ikke er en tur.* Ja, da vi fx kan starte i a og derpå gå frem og tilbage mellem a og b et eksempelvis meget stort antal gange. Vi har altså en vandring $a, b, a, b, \ldots, a, b, a$, som bestemt ikke er en tur da kanten ab påtrædes flere gange.

2. *En tur, som ikke er en vej.* Ja, da vi fx kigger på vandringen a, b, c, a: de indbyrdes forskellige kanter ab, bc og ca påtrædes, så vandringen er en tur, men knuderne er ikke indbyrdes forskellige, da knuden a optræder to gange i vandringen, så turen er ikke en vej.

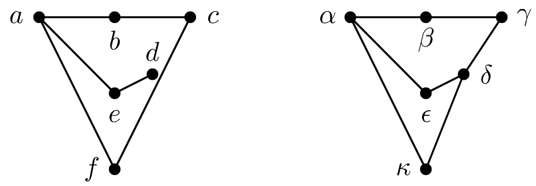


3. *En tur af længde 5.* Ja, eksempelvis vandringen a, b, c, d, a, c, som har længde $6 - 1 = 5$, og er en tur, da alle kanter der påtrædes, ab, bc, cd, da og ac, er indbyrdes forskellige.

4. *En tur af længde 6.* Skal der i K_4 være en sådan tur, skal vi altså kunne finde en vandring af længde 6, hvor alle kanter der påtrædes er indbyrdes forskellige, og disse skal der være 6 af; da der netop er 6 kanter i K_4, skal alle kanter i K_4 berøres, og vi skal altså finde en Eulertur i K_4.

Imidlertid eksisterer ingen lukket Eulertur, da valensen for alle knuder i K_4 er $4 - 1 = 3$ og derpå ulige. Derfor eksisterer jf. KG sætning 6.3 ingen tur af længde 6 i K_4, da ingen knuder har lige valens; ifølge KG sætning side 70 eksisterer heller ingen ikke-lukket Eulertur da der ikke er præcis to knuder af ulige valens. *(Vi kan betragte vores tur i 3.; vi er i vandringen endt i en knude* *hvorfra vi ikke kan nå kanten bd uden at passere en anden kant mere end én gang, hvilket vil ske uanset hvor vi starter eller slutter.)*

2 Prøvesæt opgave 6



Der skal afgøres om graferne ovenfor er bipartite. Begge grafer har 6 knuder, og vi kan derfor benytte sætningen i KG s. 54 på disse.

Grafen til venstre har én kreds, a, b, c, f, og denne er af længde 4, altså af lige længde; dermed har grafen ingen kredse af ulige længde og sætningen siger da, at grafen er bipartit. Vi kan derfor opdele knudemængden V i to disjunkte mængder $V_1 = \{a, c, d\}$ og $V_2 = \{b, e, f\}$, så $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ og alle knuder i V_1 kun er forbundne med knuder i V_2 og omvendt.

Grafen til højre har tre kredse: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ og $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ af længde 5 og $\alpha, \epsilon, \delta, \kappa$ af længde 4. Da grafen dermed har kredse af ulige længde, gælder jf. sætningen s. 54, at grafen ikke er bipartit.

3 Prøvesæt opgave 8

Der er givet en knudemængde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(i) Der skal findes hvad d_7 skal være for at $(3, 2, 1, 1, 1, 2, d_7)$ kan være en valensvektor for et træ med knudemængde V. Med observationen i KG s. 60 er summen af elementerne i en sådan lig $2 \cdot 7 - 2 = 12$, da knudemængden består af tallene fra 1 til 7, så $|V| = 7$. Det vil altså sige, at summen af alle elementer i 7-tuplet skal være 12, og da summen af de seks første er $3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$, må der gælde, at $d_7 = 12 - 10 = 2$; med $d_7 = 2$ er summen af elementerne i 7-tuplet da netop $2 \cdot 7 - 2$ og alle elementer positive, hvorpå 7-tuplet $(3, 2, 1, 1, 1, 2, 2)$ kan være en valensvektor for et træ med knudemængde V.

(ii) For at finde antallet af træer med knudemængde V og valensvektor $(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$, benytter vi sætningen s. 60; antallet er da givet ved multinomialkoefficienten i sætningen. Da $n = 7 \geq 2$, og alle elementer i 7-tuplet er positive med sum $2 \cdot 3 + 2 + 4 \cdot 1 = 12 = 2 \cdot 7 - 2$, giver sætningen da antallet

$$\begin{pmatrix} 7-2 \\ 2,2,1,0,0,0,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,2,1 \end{pmatrix} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30.$$

(iii) Et af træerne med valensvektor $(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ kan tegnes: