Geom1
Obligatorisk opgave 5

Rasmus Sylvester Bryder

26. maj 2010

Eksamen 2006-1, opgave 2

Betragt den parametriserede flade $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \cos 2v)$, hvor $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

a.

Vi skal bestemme σ'_u, σ'_v og deres krydsprodukt. Vi bemærker, at σ er glat, thi den består af glatte komponentfunktioner, og ved partiel differentiation efter u og v fås, at $\sigma'_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)$ og at $\sigma'_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, -2\sin 2v)$. Deres krydsprodukt er derfor

$$\begin{aligned}(\sigma'_u \times \sigma'_v)(u,v) &= (-2\sin v\sin 2v, 2\cos v\sin 2v, u\cos^2 v + u\sin^2 v) \\ &= (-2\sin v\sin 2v, 2\cos v\sin 2v, u).\end{aligned}$$

b.

Vi skal bestemme mængden $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \text{ er regulær i } (u,v)\}$, som netop er lig mængden $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma'_u \times \sigma'_v(u,v) \neq (0,0,0)\}$. Antag derfor, at $\sigma'_u \times \sigma'_v(u,v) = (0,0,0)$ for et tupel (u,v). Da er $u = 0$. Ligeledes har vi, at $\sin v \sin 2v = 0$ samt $\cos v \sin 2v = 0$. Vi har nu, at

$$\sin v\sin 2v = 2\sin^2 v\cos v = 0 \Leftrightarrow \cos v = 0 \vee \sin v = 0 \Leftrightarrow v \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Altså vil v være indeholdt i $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Hvis $v \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, vil $\cos v\sin 2v = 2\cos^2 v\sin v = 0$. Altså gælder $\sin v\sin 2v = 0$ og $\cos v\sin 2v = 0$, hvis og kun hvis $v \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Hvis altså vi har, at $(u,v) \in \{0\} \times \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, vil $\sigma'_u \times \sigma'_v(u,v) = (0,0,0)$. Altså er $U = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

c.

Vi skal nu bestemme koefficienterne E, F og G i den første fundamentalform for p i samtlige punkter $p \in U$, hvor σ er regulær. Lad derfor $(u,v) \in U$.

Da er $E(u,v) = \|\sigma'_u(u,v)\|^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$.

Endvidere er $F(u,v) = \sigma'_u(u,v) \cdot \sigma'_v(u,v) = -u\cos v\sin v + u\sin v\cos v = 0$.

Slutteligt er $G(u,v) = \|\sigma'_v(u,v)\|^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 4\sin^2 2v$, som er lig $u^2 + 4(\sin 2v)^2$.

d.

Vi skal bestemme koefficienterne L, M og N i den anden fundamentalform for σ i punktet $p = (0, \frac{\pi}{4})$. Vi bemærker, at σ er regulær i p grundet delopgave **b**, og at $\sigma_u'(p) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ og $\sigma_v'(p) = (0, 0, -2)$.

Vi har først og fremmest, at

$$\|(\sigma_u' \times \sigma_v')(u, v)\| = \sqrt{4\sin^2 v \sin^2 2v + 4\cos^2 v \sin^2 2v + u^2} = \sqrt{4\sin^2 2v + u^2}.$$

Derfor er

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 2v + u^2}}(-2\sin v \sin 2v, 2\cos v \sin 2v, u).$$

Vi har nu, at $\sigma_{uu}''(u, v) = (0, 0, 0)$, at $\sigma_{uv}''(u, v) = (-\sin v, \cos v, 0)$ og ikke mindst at $\sigma_{vv}''(u, v) = (-u\cos v, -u\sin v, -4\cos 2v)$. Vi får derfor pr. sætning 5.3, at $L(u, v) = 0$, at

$$M(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 2v + u^2}}(2\sin^2 v \sin 2v + 2\cos^2 \sin 2v) = \frac{2\sin 2v}{\sqrt{4\sin^2 2v + u^2}},$$

og at

$$\begin{aligned} N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 2v + u^2}}&(2u\cos v \sin v \sin 2v - 2u\cos v \sin v \sin 2v - 4\cos 2v) \\ &= -\frac{4\cos 2v}{\sqrt{4\sin^2 2v + u^2}}. \end{aligned}$$

Altså vil $L(p) = N(p) = 0$, thi $\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, og $M(p) = 2/\sqrt{4} = 1$, da $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Vi skal slutteligt bestemme hovedkrumningerne κ_1 og κ_2 i p og et tilhørende sæt af normerede hovedkrumningsvektorer. Da $G(p) = 4$, får vi, at

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

hvor $E, \ldots, M$ er evalueret i p. Korollar 5.5.2 giver nu, at hovedkrumningerne i p, κ_1 og κ_2 er rødderne κ til ligningen

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\kappa & 1 \\ \frac{1}{4} & -\kappa \end{pmatrix} = \kappa^2 - \frac{1}{4},$$

som har rødderne $\kappa = \pm\frac{1}{2}$. Sæt $\kappa_1 = \frac{1}{2}$ og $\kappa_2 = -\frac{1}{2}$. Korollar 5.5.2 giver nu, at det ønskede tilhørende sæt hovedkrumningsvektorer til κ_1 og κ_2 findes ved at finde a, b i en ligning. For κ_1 er ligningen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}a.$$

Altså opfylder alle tupler $(a, \frac{1}{2}a)$ for $a \in \mathbb{R}$ ligningen, og dermed også $v_1 = (2, 1) \neq 0$. En til κ_1 tilhørende hovedkrumningsvektor er da

$$w_1 = 2\sigma_u'(p) + \sigma_v'(p) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) + (0, 0, -2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2).$$

Da w_1 har længde $(2+2+4)^{1/2} = 2\sqrt{2}$, er den søgte normerede hovedkrumningsvektor hørende til κ_1 lig $(1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$.

For κ_2 er ligningen

$$\begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}b \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}a.$$

Altså opfylder alle tupler $(a, -\frac{1}{2}a)$ for $a \in \mathbb{R}$ ligningen, deriblandt $v_2 = (2, -1)$, så en til κ_2 tilhørende hovedkrumningsvektor er da

$$w_2 = 2\sigma'_u(p) - \sigma'_v(p) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) - (0, 0, -2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2).$$

Da vi har, at $\|w_2\| = \|w_1\|$, er en normeret hovedkrumningsvektor hørende til κ_2 lig $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

Altså er hovedkrumningerne κ_1 og κ_2 i p og et tilhørende sæt af normerede hovedkrumningsvektorer givet ved $\kappa_1 = \frac{1}{2}$ med normeret hovedkrumningsvektor $(1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$ og $\kappa_2 = -\frac{1}{2}$ med normeret hovedkrumningsvektor $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

Eksamen 2006-1, opgave 3

Lad $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ være en parametriseret glat kurve med enhedsfart. Antag, at der findes et $q \in \mathbb{R}^3$, så $\gamma''(s) = q$ for alle $s \in I$. Der skal vises, at γ er en ret linje.

Lad $q = (a, b, c)$ og $\gamma(s) = (u(s), v(s), w(s))$ for $s \in I$. Altså er $u''(s) = a$, $v''(s) = b$ og $w''(s) = c$. Da findes $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, så $u'(s) = as + a_0$, $v'(s) = bs + b_0$, $w'(s) = cs + c_0$, da u' og $s \mapsto as$ er stamfunktioner til u'', v' og $s \mapsto bs$ til v'', og w' og $s \mapsto cs$ til w''.

Nu giver lemma 4.2, da γ har enhedsfart og γ' er glat, at $\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) = 0$; dvs.

$$a^2 s + aa_0 + b^2 s + bb_0 + c^2 s + cc_0 = 0$$

for alle $s \in I$. Da vil $a^2 + b^2 + c^2 = 0$; dette skyldes, at førstegradspolynomiet

$$s \mapsto (a^2 + b^2 + c^2)s + aa_0 + bb_0 + cc_0$$

nu er lig 0 for alle $s \in I$, hvorpå det har uendelig mange rødder og dermed kun kan være nulpolynomiet. Altså er $a = b = c = 0$, og $u'(s) = a_0$, $v'(s) = b_0$ samt $w'(s) = c_0$. Der findes igen $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$, så $u(s) = a_0 s + a_1$, $v(s) = b_0 s + b_1$ og $w(s) = c_0 s + c_1$, så $\gamma(s) = (a_0 s + a_1, b_0 s + b_1, c_0 s + c_1) = s(a_0, b_0, c_0) + (a_1, b_1, c_1)$. γ er en ret linje, thi det ikke kan hænde, at (a_0, b_0, c_0) er nulvektoren; hvis det gjaldt, ville $\|\gamma'(s)\| = \|(a_0, b_0, c_0)\| = 0$ i modstrid med antagelsen om enhedsfart.

Konklusionen her er falsk uden antagelsen af enhedsfart. Betragt nemlig $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ givet ved $\delta(t) = (t, t^2, 0)$. Vi får, at $\delta(t) = (0, 2, 0)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, men δ er ikke en ret linje (δ er grafen for $x \mapsto x^2$ i xy-planen).