Geom2-dispositioner (reeksamen)

Rasmus Sylvester Bryder

20. april 2012

1 Mangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$

1. Introducér begreberne parametriseret mangfoldighed, regularitet, indlejret parametriseret mangfoldighed og mangfoldighed i $\mathbb{R}^n$
2. Forklar, at $n-m$-dimensionale mangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$ lokalt set er grafer for glatte funktioner over i $\mathbb{R}^m$ (lemma 1.6), og eventuelt, at niveaumængder er mangfoldigheder under visse betingelser (sætning 1.6)
3. Definér kort og atlas, og forklar, at alle mangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$ har et atlas ud fra definitionen
4. Forklar, at koordinatafbildningen for et kort har lokale glatte udvidelser i hvert punkt (sætning 1.7), og udled, at kort er indlejrede parametriserede mangfoldigheder og billedet er åbent i mangfoldigheden selv (korollar 1.7, dette afgør, at mangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$ netop er abstrakte mangfoldigheder)
5. Forklar eventuelt, at mangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$ har et tælleligt atlas (korollar 2.9)

2 Abstrakte mangfoldigheder. Det projektive rum

1. Definér m-dimensionale glatte atlasser på Hausdorff-rum og deraf mangfoldigheder
2. Definér reelt projektivt rum $\mathbb{RP}^n$ og forklar, hvorledes det gøres til en n-dimensional mangfoldighed (først til Hausdorff-rum og udstyr dernæst med atlas)
3. Introducér Lie-grupper og forklar, hvorledes SO(2) gøres til en 1-dimensional Lie-gruppe kaldet *cirkelgruppen*
4. Hvis der er tid: brug tid på at definere glatte afbildninger mellem abstrakte mangfoldigheder

3 Tangentrummet for en abstrakt mangfoldighed

1. Definér tangentrum for abstrakte m-dimensionale manifoldigheder
2. Vis, at de er entydigt bestemte ud fra definitionen: hvis T_1 og T_2 er tangentrum til $p \in M$ og $\sigma : U \to M$ er et kort på en mangfoldighed M med $\sigma(x_0) = p$ med differentialer $d^i\sigma_{x_0} : \mathbb{R}^m \to T_i$, da findes en lineær isomorfi $\varphi : T_1 \to T_2$ således at $\varphi \circ d^1\sigma_{x_0} = d^2\sigma_{x_0}$ for alle kort σ om p
3. Definér tangentialitet for parametriserede kurver, og vis, at det er uafhængigt af hvilket kort man benytter (lemma 3.4)
4. Konstruér tangentrum ud fra ækvivalensklasser under tangentialitet, og vis, at de opfylder definitionen (sætning 3.5)
5. Tangentvektorer kan virke på glatte funktioner ved at definere retningsafledede – perspektivér til vektorfelter

4 Glatte afbildninger og differentialer

1. Definér glathed af afbildninger mellem mangfoldigheder ved først at definere glathed ved lokale glatte udvidelser og udled en definition på glathed fra en abstrakt manifoldighed over i $\mathbb{R}^n$
2. Vis sætning 2.7; at vi for mangfoldigheder $S \subseteq \mathbb{R}^n$ og $S' \subseteq \mathbb{R}^m$, $p \in S$, en afbildning $f : S \to S'$, og kort $\sigma : U \to S$ om p og $\sigma : V \to S'$ om $f(p)$ har, at f er glat i $p \in S$, hvis og kun hvis $p \in f^{-1}(\sigma'(V))^\circ$ og $\sigma'^{-1} \circ f \circ \sigma$ er glat i $\sigma^{-1}(p)$
3. Brug dette til at definere glathed af en funktion mellem vilkårlige abstrakte mangfoldigheder
4. Definér tangentrum; fortæl hurtigt, at de eksisterer, og at elementer i tangentrum for et punkt er tangentvektorer til parametriserede kurver på mangfoldigheden igennem punktet
5. Bevis, at der findes differentialer fra tangentrum til tangentrum ved lemma 3.8.1; forklar, at de er generaliseringer af Jacobi-matricer, og at vi tager udgangspunkt i hvad vi ved for reelle vektorrum, og at vi får kædereglen
6. Vis sætning 3.8; at for parametriserede kurver $\gamma : I \to M$ på en mangfoldighed med $\gamma(t_0) = p$ og en glat afbildning $f : M \to N$ opfylder $df_p(\gamma'(t_0)) = (f \circ \gamma)'(t_0)$
7. Forklar eventuelt, at diffeomorfier mellem mangfoldigheder fortæller, at de har samme dimension ved at benytte differentialer

5 Delmangfoldigheder

1. Definér abstrakte delmangfoldigheder (ud fra hvad vi ved om delmangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$), og nævn, at delmangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$ er mangfoldigheder på den sædvanlige manér

2. Vis sætning 4.3

3. Vis lemma 4.3; at vi kan vise, at noget er en delmangfoldighed ved at vise det lokalt

4. Vis, at vi kan opnå delmangfoldigheder ved brug af begrebet submersivitet, og nævn sætning 4.4: for en glat afbildning $f : M \to N$ og $q \in N$, vil mængden af $p \in f^{-1}(q)$ hvorom der gælder, at f er submersiv i p, hvis ikke-tom, være en $m - n$-dimensional delmangfoldighed af M

6 Den ortogonale gruppe er en Lie-gruppe

1. Definér, hvad det vil sige for en glat afbildning at være submersiv i et punkt

2. Vis første halvdel af sætning 4.4; at for en glat afbildning $f : M \to N$ og $q \in N$, vil mængden af $p \in f^{-1}(q)$ hvorom der gælder, at f er submersiv i p, hvis ikke-tom, være en $m - n$-dimensional delmangfoldighed af M

3. Definér Lie-grupper, og forklar, at hvis en undergruppe af $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ er en mangfoldighed i $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, da er det en Lie-gruppe

4. Vis, at den ortogonale gruppe er en Lie-gruppe, ved at vise, at det er en delmangfoldighed i $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ (sætning 4.6)

7 Deling af enheden

1. Definér en deling af enheden

2. Definér lokal endelighed for mængdesystemer på et topologisk rum

3. Introducér først lemma 5.3.1; at der findes et lokalt endeligt atlas for en mangfoldighed M, hvis og kun hvis der eksisterer en kompakt overdækning $M = \bigcup_{\beta \in B} K_\beta$ og en lokalt endelig åben overdækning $M = \bigcup_{\beta \in B} W_\beta$ således at $K_\beta \subseteq W_\beta$ for alle $\beta \in B$

4. Skitser beviset for lemma 5.4; eksistensen af bump functions for ethvert kort $\sigma : U \to M$ på en mangfoldighed M

5. Bevis sætning 5.5; at for mangfoldigheder M med et lokalt endeligt atlas og en åben overdækning $M = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ findes en deling af enheden $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ for M, hvor $\mathrm{supp} f_\alpha \subseteq \Omega_\alpha$ for alle $\alpha \in A$

6. Perspektivér til hvorfor det hjælper at benytte sætning 5.5, når man beviser sætning 5.6

8 Indlejring i euklidisk rum

1. Nævn først Whitneys sætning, og forklar, at vi vil vise en svagere version af den

2. Definér en deling af enheden, og nævn sætning 5.5; at for mangfoldigheder M med et lokalt endeligt atlas og en åben overdækning $M = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ findes en deling af enheden $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ for M, hvor $\operatorname{supp} f_\alpha \subseteq \Omega_\alpha$ for alle $\alpha \in A$

3. Bevis sætning 5.6; at der for en mangfoldighed med et endeligt atlas findes et $N \in \mathbb{N}$ og en indlejring af M i $\mathbb{R}^N$

4. Perspektivér til det reelle projektive rum og hvorledes vi konstruerer et atlas på det; forklar, at vi med ovenstående kan indlejrede $\mathbb{RP}^2$ i $\mathbb{R}^9$

9 Sammenhængenhed og komponenter

1. Definér både sammenhængenhed og kurvesammenhængenhed for topologiske rum

2. Definér lokal kurvesammenhængenhed, og vis, at mangfoldigheder er lokalt kurvesammenhængende

3. Vis, at enhver åben sammenhængende mængde i et lokalt kurvesammenhængende rum er kurvesammenhængende (lemma 5.8)

4. Definér komponenter

5. Vis, at et topologisk rum er en klassedeling af sine komponenter, og at der i et lokalt kurvesammenhængende rum gælder, at komponenterne er åbne og kurvesammenhængende (sætning 5.9)

6. Konkludér, at i en mangfoldighed er komponenterne delmangfoldigheder af samme dimension (korollar 5.9)

7. Perspektivér til eksempler (fx $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eller $\mathrm{O}(n)$)

10 Vektorfelter og Lie-paranteser

1. Definér glatte vektorfelter på mangfoldigheder i $\mathbb{R}^n$ (spring måske over)

2. Forklar, hvordan det motiverer definitionen for abstrakte mangfoldigheder: at et vektorfelt Y er glat på en mangfoldighed S er ækvivalent med, at der for ethvert kort $\sigma : U \to S$ findes $a_i \in C^\infty(U)$ således, at $Y(\sigma(u)) = \sum_{i=1}^m a_i(u)\sigma_i'(u)$ (spring måske over)

3. Definér vektorfelter på abstrakte mangfoldigheder ud fra dette, og forklar, at glatte vektorfelter udgør et vektorrum på mangfoldigheden

4. Forklar, at vi ved retningsafledede på abstrakte mangfoldigheder kan få en virkning af vektorfelter på glatte funktioner

5. Forklar, hvorfor vektorfelter er entydigt bestemt ved hvordan de virker på glatte funktioner
6. Bevis lemma 6.2.2
7. Introducér Lie-parantesen som en lineær operator $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ og vis sætning 6.5; at der findes et entydigt glat vektorfelt Z så $[X, Y]f = Zf$ for alle $f \in C^\infty(\Omega)$ og Ω åben i M
8. Vis, at glatte vektorfelter med Lie-parantesen giver en Lie-algebra

11 Lie-algebraen af en Lie-gruppe

1. Definér først Lie-grupper
2. Definér hvad det vil sige, at vektorfelter på en Lie-gruppe er venstreinvariante
3. Betragt venstreinvariante vektorfelter over Lie-gruppen $\mathbb{R}^n$
4. Definér Lie-algebraer, og konkludér, at for differentiable mangfoldigheder M er vektorrummet af glatte vektorfelter en Lie-algebra
5. Definér Lie-algebraen af en Lie-gruppe (underrummet af venstreinvariante glatte vektorfelter er en Lie-delalgebra)
6. Vis, at for $G = \mathbb{R}^n$ er Lie-parantesen triviel; dette skyldes til dels, at G er kommutativ (der gælder, at sammenhængende kommutative Lie-grupper er de eneste, der har triviel parantes)
7. Vis, at ethvert venstreinvariant vektorfelt er glat (lemma 6.8.1, inkluder evt. lemma 6.8.2)
8. Vis, at for Lie-grupper G med Lie-algebra $\mathfrak{g}$ er evalueringsafbildningen $X \mapsto X(e)$ en lineær isomorfi $\mathfrak{g} \to T_eG$, og konkludér, at $\mathfrak{g}$ har samme dimension som G (sætning 6.8)

12 Lie-algebraen af $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

1. Vis, at $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ er en Lie-gruppe
2. Definér en Lie-algebra
3. Definér Lie-algebraen $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ med addition og kommutatoren som Lie-parantes)
4. Definér Lie-algebraen af en Lie-gruppe (underrummet af venstreinvariante glatte vektorfelter er en Lie-delalgebra)
5. Fortæl, at for Lie-grupper G med Lie-algebra $\mathfrak{g}$ er evalueringsafbildningen $X \mapsto X(e)$ en lineær isomorfi $\mathfrak{g} \to T_eG$, og konkludér, at $\mathfrak{g}$ har samme dimension som G (sætning 6.8)

6. Forklar, at for $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ er tangentrummene isomorfe med $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$

7. Vis, at $[X, Y](e) = X(e)Y(e) - Y(e)X(e)$ for venstreinvariante glatte vektorfelter på G; under ovenstående isomorfi får vi, at Lie-algebraen for G i realiteten bare er $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$