Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

10. og 13. september 2013

Supplerende opgave 4

Betragt mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x < y\}.$$

Er A åben? Er A afsluttet? Er A en Borel-mængde? [Vink: Prøv at skriv A som en tællelig forening af afsluttede mængder.]

A er for det første ikke åben. Vi har, at $(0,1) \in A$, men $(0,1)$ er ikke et indre punkt for A: Hvis $r > 0$ er vilkårlig, har vi nemlig, at $(0, 1 + \frac{r}{2}) \in K((0,1), r)$, men da

$$0^2 + \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 > 1^2 = 1,$$

vil $(0, 1 + \frac{r}{2}) \notin A$, således at $K((0,1), r) \not\subseteq A$ for alle $r > 0$.

A er heller ikke afsluttet. Sætter vi $x_n = (0, \frac{1}{n})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, har vi at $x_n \in A$. Da $x_n \to (0,0)$, vil $(0,0) \in \overline{A}$. Imidlertid vil $(0,0) \notin A$, så $\overline{A} \neq A$.

A er dog en Borel-mængde. Dette er der forskellige måder at vise på: fx kan vi indse, at

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\},$$

hvor den første mængde er afsluttet (den er urbilledet af den afsluttede mængde $(-\infty, 1] \subseteq \mathbb{R}$ under den kontinuerte funktion $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$) og den anden mængde er åben (den er urbilledet af den åbne mængde $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ under den kontinuerte funktion $(x, y) \mapsto x - y$). Da både åbne og afsluttede mængder er Borel-mængder og tællelige snit af Borel-mængder også er Borel-mængder (se Example 3.2 (iii)), følger, at A selv er en Borel-mængde.

Man kan også indse, at

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ x + \frac{1}{n} \leq y\right\}$$

På samme måde som ovenfor kan ses, at hver

$$A_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x + \frac{1}{n} \leq y\}$$

er afsluttet og dermed en Borel-mængde, idet den er et snit af to urbilleder af afsluttede mængder under kontinuerte funktioner, således at A er afsluttet. Lad os derfor vise, at ovenstående lighed faktisk gælder.

Hvis $a = (x, y) \in A$, vil $x^2 + y^2 \leq 1$ og $x < y$. Da $y - x > 0$, findes $n \in \mathbb{N}$ således at $n \geq \frac{1}{y-x}$ (jf. Arkimedes' princip), hvormed $y - x \geq \frac{1}{n}$ og $x + \frac{1}{n} \leq y$. Vi har derfor, at

$$x^2 + y^2 \leq 1 \text{ og } x + \frac{1}{n} \leq y,$$

så $a \in A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Hvis omvendt $a = (x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, findes der $n \in \mathbb{N}$ så $a \in A_n$. Altså vil $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq x + \frac{1}{n} > x$, hvormed $a = (x, y) \in A$..

(Supplerende opgave 5)

Lad $\mathcal{O}$ betegne familien af alle åbne delmængder af $\mathbb{R}$, og betragt familierne

$$\mathcal{O}_c = \mathcal{O} \cup \{U^c \,|\, U \in \mathcal{O}\}, \quad \mathcal{O}_{c\sigma} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \,\middle|\, U_n \in \mathcal{O}_c \right\}, \quad \mathcal{O}_{c\sigma c} = \mathcal{O}_{c\sigma} \cup \{U^c \,|\, U \in \mathcal{O}_{c\sigma}\}.$$

Bemærk først, at $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_c$, at $\mathcal{O}_{c\sigma} \subseteq \mathcal{O}_{c\sigma c}$, og at hvis $U \in \mathcal{O}_c$, vil vi have $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathcal{O}_{c\sigma}$, hvor $U_n = U \in \mathcal{O}_c$. Altså vil $\mathcal{O}_c \subseteq \mathcal{O}_{c\sigma}$.

(i)

Vis, at $\mathcal{O}_c$ består af alle delmængder af $\mathbb{R}$ som enten er åbne eller afsluttede.

$\mathcal{O}$ er familien af alle åbne delmængder af $\mathbb{R}$. Enhver afsluttet delmængder af $\mathbb{R}$ er komplementet af en åben delmængde af $\mathbb{R}$, så disse udgør $\{U^c \,|\, U \in \mathcal{O}\}$. Dermed følger det ønskede.

(ii)

Vis, at alle intervaller ligger i $\mathcal{O}_{c\sigma}$ (også de halvåbne intervaller af formen $(a, b]$ eller $[a, b)$).

Intervallerne på formen (a, b), (a, ∞) og $(-\infty, b)$ er alle åbne og ligger dermed i $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{c\sigma}$, og intervallerne på formen $[a, b]$, $[a, \infty)$ og $(-\infty, b]$ er alle afsluttede og ligger dermed i $\mathcal{O}_c \subseteq \mathcal{O}_{c\sigma}$ jf. (i). Tilbage er kun at tjekke for de halvåbne intervaller. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$, er

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right].$$

(Hvis $a + \frac{1}{n} > b$, er intervallet tomt, hvilket er OK!) Lad os tjekke, at ligheden gælder. Hvis $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b]$, findes $n \in \mathbb{N}$ så $x \in [a + \frac{1}{n}, b]$. Dermed vil $a < a + \frac{1}{n} \leq x \leq b$, hvormed $x \in (a, b]$. Hvis omvendt $x \in (a, b]$, vil $a < x$. Der findes da $n \in \mathbb{N}$, således at $n \geq \frac{1}{x-a}$, hvormed $x - a \geq \frac{1}{n}$, så vi har

$$a + \frac{1}{n} \leq x \leq b.$$

Altså vil $x \in [a + \frac{1}{n}, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b]$. Foreningen tages over afsluttede delmængder af $\mathbb{R}$ (som er elementer i $\mathcal{O}_c$ jf. (i)), hvormed $(a, b] \in \mathcal{O}_{c\sigma}$. På samme måde vises, at

$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{O}_{c\sigma}.$$

(iii)

Vis, at alle tællelige delmængder af $\mathbb{R}$ tilhører $\mathcal{O}_{c\sigma}$.

Lad $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ være en tællelig delmængde af $\mathbb{R}$. Da vil $\{a_n\}$ være en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, således at $\{a_n\} \in \mathcal{O}_c$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed vil

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \in \mathcal{O}_{c\sigma},$$

jf. definitionen på $\mathcal{O}_{c\sigma}$.

(iv)

Vis, at mængden af irrationale tal tilhører $\mathcal{O}_{c\sigma c}$.

$\mathbb{Q}$ er en tællelig delmængde af $\mathbb{R}$, så $\mathbb{Q} \in \mathcal{O}_{c\sigma}$ jf. (iii). Dermed vil $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c \in \mathcal{O}_{c\sigma c}$ jf. definitionen på $\mathcal{O}_{c\sigma c}$.

(v)

Vis, at mængden af irrationale tal *ikke* tilhører $\mathcal{O}_{c\sigma}$.

Vi benytter til dette følgende konsekvens af Baires sætning: Hvis $U_1, U_2, U_3, \ldots$ er en følge af åbne tætte delmængder af $\mathbb{R}$, så er $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ overtællelig.

Hvis der gjaldt, at $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{O}_{c\sigma}$, ville $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ for mængder $A_n \in \mathcal{O}_c$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ har ingen indre punkter, da vi for ethvert irrationalt tal kan finde et rationalt tal, der ligger vilkårligt tæt på det (dvs. ingen kugle i $\mathbb{R}$ om et irrationalt tal kan være helt indeholdt i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Derfor kan ingen af A_n'erne være åbne, thi ellers ville $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ indeholde en åben delmængde af $\mathbb{R}$ og dermed have et indre punkt.

Da ingen af A_n'erne er åbne, har vi altså jf. (i), at hver A_n er afsluttet. Dermed vil

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_n^c$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{Q} \subseteq A_n^c \subseteq \mathbb{R}$, vil

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{A_n^c} \subseteq \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R},$$

hvormed $\overline{A_n^c} = \mathbb{R}$. Altså er A_n^c åben og tæt i $\mathbb{R}$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. Jf. konsekvensen af Baires sætning vil $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ være overtællelig, i modstrid med at vi ved at $\mathbb{Q}$ er tællelig. Altså kan ikke gælde, at $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{O}_{c\sigma}$.

(vi)

Kan du finde på en delmængde af $\mathbb{R}$, som ikke ligger i $\mathcal{O}_{c\sigma c}$?

Prøv selv: det er overraskende svært (sågar sindssygt svært). En fugl sang engang for længe siden om, at

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \,|\, a \leq 0\} \cup \{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, b > 0\} \notin \mathcal{O}_{c\sigma c}.$$

Lad os prøve at vise hvad fuglen sang om. A består altså af alle ikke-positive rationale tal og alle positive irrationale tal. Antag for modstrid, at $A \in \mathcal{O}_{c\sigma c}$. Der kan da enten gælde, at $A = U$ eller $A = U^c$ for $U \in \mathcal{O}_{c\sigma}$. Antag det første. Da findes $(U_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{O}_c$ så

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Vi kan antage, at alle U_n'erne er ikke-tomme. Antag, at U_n var åben for et $n \in \mathbb{N}$. Tag et $x \in U_n$ og lad $K(x, r) \subseteq U_n \subseteq A$ være en åben kugle om x. Hvis $x \leq 0$, findes $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ med $y < 0$ så $|y - x| < r$, hvormed $y \notin A$ men $y \in K(x, r) \subseteq A$ (modstrid); hvis $x > 0$, findes $y \in \mathbb{Q}$ med $y > 0$ så $|y - x| < r$, hvilket også giver modstrid. Altså må alle U_n være afsluttede jf. (i).

Definér nu $V_n = U_n \cap [1, \infty)$; da vil V_n være afsluttet for alle n. Bemærk, at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap [1, \infty)) = [1, \infty) \cap A = \{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, b > 1\}.$$

Defineres $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $f(x) = 2 - x$, er f kontinuert, så $f^{-1}(V_n)$ er afsluttet for alle $n \in \mathbb{N}$. Bemærk, at f er bijektiv med $f^{-1} = f$. Definer slutteligt $W_n = V_n \cup f^{-1}(V_n) = V_n \cup f(V_n)$ for $n \in \mathbb{N}$; da er W_n også afsluttet. Derfor vil

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{c\sigma} \ni \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} f(V_n) &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cup f \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) \\
&= \{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, b > 1\} \cup \{2 - b \,|\, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ b > 1\} \\
&= \{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, b > 1\} \cup \{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, b < 1\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Dermed indeholder $\mathcal{O}_{c\sigma}$ de irrationale tal. Modstrid! Et tilsvarende argument kan bruges hvis $A = U^c$ for et $U \in \mathcal{O}_{c\sigma}$; da benytter vi blot intervallet $(-\infty, 1]$ i stedet for $[1, \infty)$.

Supplerende opgave 6

Vis at de to mængder

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n+\frac{4}{n^2}\right]$$

er Borel-mængder. Bestem Lebesgue-målet af begge mængder.

Alle afsluttede delmængder af $\mathbb{R}$ er Borel-mængder (da åbne mængder er Borel-mængder, vil deres komplementer også være det), og jf. definitionen på en σ-algebra følger, at tællelige foreninger af Borel-mængder er Borel-mængder. Altså følger det første udsagn.

Vi tager nu et lille afbræk for at vise noget ekstremt vigtigt, som Lebesgue-målet opfylder:

Sætning 1. *For alle $x \in \mathbb{R}^k$ gælder, at $\{x\}$ er en Borel-mængde, og at*

$$\lambda^k(\{x\}) = 0.$$

Bevis. $\{x\}$ er afsluttet og dermed en Borel-mængde. Beviset for Theorem 4.4 giver, at (iii') gælder for alle mål. Skriv $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Da vil

$$A_n = \left[x_1, x_1 + \frac{1}{n}\right) \times \left[x_k, x_k + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

være en Borel-mængde. Da vi har, at $A_n \subseteq A_m$ for $m \leq n$, er følgen (A_n) aftagende. Endvidere er $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$, så jf. (iii') vil

$$\lambda^k(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^k(A_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}}_{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,$$

som ønsket. □

Korollar 2. *For alle $a, b \in \mathbb{R}$ gælder, at*

$$\lambda((a,b)) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = \lambda([a,b]).$$

Bevis. Vi har fx

$$\lambda([a,b]) = \lambda([a,b)) + \lambda(\{b\}) = \lambda([a,b))$$

ved Proposition 4.3. Gør noget tilsvarende for de andre intervaller ud fra $\lambda([a,b])$. □

Bemærk først, at $[n, n + \frac{1}{n^2}]$ og $[m, m + \frac{1}{m^2}]$ er disjunkte for $m > n \geq 3$: hvis $x \in \mathbb{R}$ var indeholdt i begge to, ville

$$m \leq x \leq n + \frac{1}{n^2} \leq n + \frac{1}{9} < n + 1 \leq m,$$

en tydelig modstrid. Intervallerne $[n, n + \frac{1}{n^2}]$ og $[m, m + \frac{1}{m^2}]$ er ikke disjunkte, hvis $n = 1$ og $m = 2$. Slår vi dem sammen, får vi, at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right] = \left[1, 2 + \frac{1}{4}\right] \cup \underbrace{\bigcup_{n=3}^{\infty}\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]}_{\text{disjunkt forening}}.$$

Begge mængder er disjunkte: hvis x lå i begge, ville findes $n \geq 3$ så $3 \leq n \leq x \leq 2 + \frac{1}{4}$, en klar modstrid. Højresiden er da en disjunkt forening af Borel-delmængder af $\mathbb{R}$, hvormed

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]\right) &= \lambda\left(\left[1, 2+\frac{1}{4}\right]\right) + \lambda\left(\bigcup_{n=3}^{\infty}\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \lambda\left(\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Mht. den anden mængde $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n, n+\frac{4}{n^2}]$ har vi lidt større problemer, men de er i samme boldgade som ovenfor. Lad os definere $A_n = [n, n+\frac{4}{n^2}]$ og undersøge dem:

$$A_1 = [1,5], \quad A_2 = [2,3], \quad A_3 = \left[3, 3+\frac{4}{9}\right], \quad A_4 = \left[4, 4+\frac{1}{4}\right], \quad A_5 = \left[5, 5+\frac{4}{25}\right], \quad \ldots$$

Altså vil

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = A_1 \cup A_5 = \left[1, 5+\frac{4}{25}\right].$$

For $n \geq 6$ er der ikke noget problem. For $m > n \geq 6$ vil $[n, n+\frac{4}{n^2}]$ og $[m, m+\frac{4}{m^2}]$ nemlig være disjunkte: hvis $x \in \mathbb{R}$ var indeholdt i begge to, ville

$$m \leq x \leq n + \frac{4}{n^2} \leq n + \frac{4}{36} < n+1 \leq m,$$

en tydelig modstrid. Altså har vi, at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n+\frac{4}{n^2}\right] = \left[1, 5+\frac{4}{25}\right] \cup \underbrace{\bigcup_{n=6}^{\infty}\left[n, n+\frac{4}{n^2}\right]}_{\text{disjunkt forening}}.$$

Ovenstående to mængder på højresiden er disjunkte, da der ikke findes x så $n \leq x \leq 5+\frac{4}{25}$ for noget $n \geq 6$. Altså vil

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n, n+\frac{4}{n^2}\right]\right) &= \lambda\left(\left[1, 5+\frac{4}{25}\right]\right) + \lambda\left(\bigcup_{n=6}^{\infty}\left[n, n+\frac{4}{n^2}\right]\right) \\
&= 4 + \frac{4}{25} + \sum_{n=6}^{\infty}\lambda\left(\left[n, n+\frac{4}{n^2}\right]\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) \\
&= 4\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) \\
&= 4\left(\frac{24\pi^2}{144} - \frac{36}{144} - \frac{16}{144} - \frac{9}{144}\right) \\
&= 4 \cdot \frac{24\pi^2 - 61}{144} = \frac{24\pi^2 - 61}{36}.
\end{aligned}$$

Supplerende opgave 7

Vis, at $\lambda(U) > 0$ for enhver åben ikke-tom delmængde U af $\mathbb{R}$. Vis, at også $\lambda^k(U) > 0$ for enhver åben ikke-tom delmængde U af $\mathbb{R}^k$. (Som sædvanligt angiver λ Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$ og λ^k angiver Lebesgue-målet på $\mathbb{R}^k$.)

Vi nøjes med at vise den anden påstand, da den medfører den første. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben og ikke-tom. Da findes der et $a = (a_1, \ldots, a_k) \in U$, som dermed er et indre punkt, og derfor findes $r > 0$ så

$$K(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x-a\| < r\} \subseteq U$$

Grundet monotoni for mål (Proposition 4.3 (ii)) er det nok at vise, at $\lambda^k(K(a,r)) > 0$. Definer nu $r' > 0$ ved

$$r' = \frac{r}{\sqrt{k}}.$$

Vi påstår nu, at

$$A := [a_1, a_1+r') \times [a_2, a_2+r') \times \cdots \times [a_k, a_k+r') \subseteq K(a,r).$$

Lad $x = (x_1, \dots, x_k) \in A$. Da vil $x_i \in [a_i, a_i + r')$, hvormed $a_i \le x_i < a_i - r'$ og $0 \le x_i - a_i < r'$ for $i = 1, \dots, k$. Dermed vil

$$\|x - a\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - a_i)^2 < \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{r}{\sqrt{k}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{r^2}{k} = r^2,$$

hvormed $\|x - a\| < r$. Altså har vi jf. monotoni, at

$$\lambda(U) \ge \lambda(K(a, r)) \ge \lambda(A) = \prod_{i=1}^{k} ((a_i + r') - a_i) = \prod_{i=1}^{k} r' = (r')^k > 0,$$

som ønsket.

3.2

Vis følgende påstande fra Example 3.3:

(iv)

$\{\emptyset, B, X\}$ er ikke en σ-algebra, medmindre $B = \emptyset$ eller $B = X$.

Vi viser, at $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, X\}$ er en σ-algebra hvis og kun hvis $B = \emptyset$ eller $B = X$. Hvis $B = \emptyset$ eller $B = X$, er $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ være en σ-algebra (jf. Example 3.3 (ii)). Hvis $\mathcal{A}$ er en σ-algebra, vil $B^c \in \mathcal{A}$, hvormed enten $B^c = \emptyset$ (i hvilket tilfælde $B = X$) eller $B^c = X$ (i hvilket fald $B = \emptyset$), idet $B^c \ne B$.

(vi)

(Spor-σ-algebraer.) Lad $E \subseteq X$ være en delmængde og lad $\mathcal{A}$ være en σ-algebra på X. Da vil

$$\mathcal{A}_E := E \cap \mathcal{A} = \{E \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

være en σ-algebra på E.

Da $X \in \mathcal{A}$ og $E = E \cap X \in \mathcal{A}_E$, følger (Σ_1). For ethvert $B \in \mathcal{A}_E$ findes $A \in \mathcal{A}$ så $B = E \cap A$. Da $A^c \in \mathcal{A}$ og komplementet $E \setminus B$ af B i E er lig

$$E \setminus B = E \setminus (E \cap A) = (E \setminus E) \cup (E \setminus A) = E \cap A^c \in \mathcal{A}_E$$

jf. Opgave 2.1 (iv), følger (Σ_2). Slutteligt lader vi $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ være en familie af mængder i $\mathcal{A}_E$. Skriver vi $B_j = E \cap A_j$ for mængder $A_j \in \mathcal{A}$, har vi, at

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (E \cap A_j) = E \cap \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) \in \mathcal{A}_E,$$

idet $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ er en σ-algebra. Dermed følger (Σ_3), så $\mathcal{A}_E$ er en σ-algebra på E.

(vii)

(Urbillede-σ-algebraer.) Lad $f \colon X \to X'$ være en afbildning, og lad $\mathcal{A}'$ være en σ-algebra på X'. Da vil

$$\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$$

være en σ-algebra på X.

Idet $X = f^{-1}(X') \in \mathcal{A}$, da $X' \in \mathcal{A}'$, følger (Σ_1). Lades $A \in \mathcal{A}$, findes $A' \in \mathcal{A}'$ så $A = f^{-1}(A')$. Da vil

$$A^c = X \setminus A = f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(X \setminus A') \in \mathcal{A}$$

jf. Opgave 2.4 (ii), idet $X \setminus A' \in \mathcal{A}'$. Derfor gælder (Σ_2). Slutteligt lades $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ være en familie af mængder i $\mathcal{A}$. For hvert $j \in \mathbb{N}$ vælges $A'_j \in \mathcal{A}'$ så $A_j = f^{-1}(A'_j)$; da vil

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(A'_j) = f^{-1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A'_j \right) \in \mathcal{A},$$

også jf. Opgave 2.4 (ii) samt faktum at $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A'_j \in \mathcal{A}'$. Altså gælder (Σ_3), så $\mathcal{A}$ er en σ-algebra på X.

3.3

Vis påstandene i Remark 3.5.

(i)

Hvis $\mathcal{G}$ er en σ-algebra, er $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G})$.

Vi har, at σ-algebraen $\sigma(\mathcal{G})$ er givet ved

$$\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{G}\subseteq\mathcal{A}}} \mathcal{A},$$

og dermed trivielt $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ (dette gælder for *alle* mængder). Vi har jf. ovenstående, at hvis $\mathcal{A}$ er en σ-algebra, der indeholder $\mathcal{G}$, vil $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$. Da $\mathcal{G}$ er en σ-algebra og $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$, vil derfor gælde $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$.

(ii)

Hvis $A \subseteq X$, vil $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Sæt først $\mathcal{G} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$. Da $\sigma(\{A\})$ er en σ-algebra, vil $X, \emptyset \in \sigma(\{A\})$ jf. (Σ_1) i Definition 3.1 og Properties 3.2. Endvidere vil $A \in \{A\} \subseteq \sigma(A)$, hvormed $A^c \in \sigma(\{A\})$ jf. (Σ_2). Altså har vi, at $\sigma(\{A\}) \supseteq \mathcal{G}$.

Kan vi vise, at $\mathcal{G}$ er en σ-algebra, er vi færdige: da $\{A\} \subseteq \mathcal{G}$, vil $\sigma(\{A\}) \subseteq \mathcal{G}$. (Σ_1) og (Σ_2) er klart opfyldte i Definition 3.1. Hvis $(A_n)_{n\geq 1}$ er en familie af mængder fra $\mathcal{G}$, har vi følgende muligheder:

1. Mindst en A_n er lig X: da vil $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \in \mathcal{G}$.
2. Ingen A_n er lig X:
   (a) Hvis mindst en A_n er lig A og mindst en anden A_n er lig A^c, vil $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \in \mathcal{G}$.
   (b) Hvis mindst en A_n er lig A, og ingen A_n er lig A^c, vil A_n'erne være enten A eller $\emptyset$, så $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{G}$.
   (c) Hvis mindst en A_n er lig A^c, og ingen A_n er lig A, vil A_n'erne være enten A^c eller $\emptyset$, så $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A^c \in \mathcal{G}$.
   (d) Hvis ingen af A_n'erne er lig A eller A^c, vil $A_n = \emptyset$ for alle n, så $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \in \mathcal{G}$.

Altså er alle muligheder udtømt, og $\mathcal{G}$ er en σ-algebra.

(iii)

Hvis $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ og $\mathcal{A}$ er en σ-algebra, vil

$$\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Sidste lighedstegn viste vi i (i). Da $\sigma(\mathcal{G})$ er en σ-algebra og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, er $\sigma(\mathcal{G})$ en σ-algebra der indeholder $\mathcal{F}$. Pr. definition på $\sigma(\mathcal{F})$ vil derfor gælde, at $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, idet $\sigma(\mathcal{F})$ er den *mindste* σ-algebra, der indeholder $\mathcal{F}$. Dette viser også den sidste inklusion.

3.4

Lad $X = [0, 1]$. Find σ-algebraen frembragt af mængderne

(i)

$(0, \frac{1}{2})$.

Vi viste i 3.3(ii), at den frembragte σ-algebra her er

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset,\ (0, \tfrac{1}{2}),\ \{0\} \cup [\tfrac{1}{2}, 1],\ [0, 1]\}.$$

(ii)

$[0, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, 1]$.

σ-algebraen er givet ved

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \underbrace{[0, \tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{3}{4}, 1]}_{\text{mængderne selv}}, \underbrace{[\tfrac{1}{4}, 1],\ [0, \tfrac{3}{4}]}_{\text{komplementer}}, \underbrace{[0, \tfrac{1}{4}) \cup (\tfrac{3}{4}, 1]}_{\text{forening}}, \underbrace{[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]}_{\text{dens komplement}}, [0, 1]\}.$$

Hvorfor? Det er svært at give et argument uden at blive sindssyg af at tjekke mængderne igennem, så det dropper vi.[1]

(iii)

$[0, \frac{3}{4}]$, $[\frac{1}{4}, 1]$.

Den frembragte σ-algebra $\mathcal{A}_3$ er lig $\mathcal{A}_2$. Først og fremmest er både $[0, \frac{3}{4}]$ og $[\frac{1}{4}, 1]$ indeholdt i $\mathcal{A}_2$, så $\mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{A}_2$. Da $[0, \frac{1}{4}) = [\frac{1}{4}, 1]^c \in \mathcal{A}_3$ og $(\frac{3}{4}, 1] = [0, \frac{3}{4}]^c \in \mathcal{A}_3$, følger, at $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3$.

3.7

Find et eksempel (fx i $\mathbb{R}$), der viser, at $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j$ ikke behøver at være åben, selvom hvis alle U_j'er er åbne.

Definer $U_j = (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Da er alle U_j'er åbne, men

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j = \{0\},$$

som *ikke* er åben.

3.8

Vis hver påstand fra Remark 3.9.

Det er nok at vise påstandene for rationale endepunkter jf. Opgave 3.3 (iii) (hvorfor?). Vi ved endvidere, at Borel-algebraen $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ er frembragt af mængdesystemerne

$$\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{O}$$

jf. Theorem 3.8, hvor $\mathcal{O}$ er systemet af åbne delmængder af $\mathbb{R}$.

Vi viser først, at $\sigma(\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}) = \mathcal{B}$. Vi har da, at $(-\infty, a) \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}$ for alle $a \in \mathbb{Q}$, så $\sigma(\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}) \subseteq \mathcal{B}$. Hvis $a, b \in \mathbb{Q}$ og $a < b$, vil

$$[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a)^c \in \sigma(\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\})$$

idet σ-algebraer er stabile under komplementer og tællelige snit. Dermed vil

$$\mathcal{B} = \sigma(\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}) \subseteq \sigma(\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\})$$

jf. Theorem 3.8 og Opgave 3.3 (iii). Altså følger, at $\sigma(\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}) = \mathcal{B}$.

Lad os vise en enkelt mere: vi tager $\sigma(\{(c, \infty) \mid c \in \mathbb{Q}\}) = \mathcal{B}$. For alle $c \in \mathbb{Q}$ er (c, ∞) åben, $(c, \infty) \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}$ for alle $c \in \mathbb{Q}$. Altså vil $\sigma(\{[c, \infty) \mid c \in \mathbb{Q}\}) \subseteq \mathcal{B}$. Omvendt vil der for $a, b \in \mathbb{Q}$ med $a < b$ gælde, at

$$(a, b) = (a, \infty) \setminus [b, \infty) = (a, \infty) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, \infty) \right) \in \sigma(\{(c, \infty) \mid c \in \mathbb{Q}\}),$$

[1] Vi kan sige, at $[0, \frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $(\frac{3}{4}, 1]$ er en disjunkt opdeling af $[0, 1]$. Der er 2^3 måder at forene disse på, altså 8 delmængder i alt.

idet σ-algebraer er stabile under komplementer, tællelige snit og tællelige foreninger (bemærk, at alle endepunkter er rationale!). Altså vil hvormed

$$\mathcal{B} = \sigma(\{(a,b) \,|\, a,b \in \mathbb{Q}\}) \subseteq \sigma(\{(c,\infty) \,|\, c \in \mathbb{Q}\})$$

jf. Theorem 3.8 og Opgave 3.3 (iii), hvormed vi igen har lighed.

Tilsvarende metoder kan bruges til at vise de andre påstande.

3.9

Lad $B_r(x)$ betegne den åbne kugle i $\mathbb{R}^n$ med centrum x og radius r (altså $B_r(x) = K(x,r)$). Vis, at Borel-mængderne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ er frembragt af familien af åbne kugler

$$\mathbb{B} := \{B_r(x) \,|\, x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0\}.$$

Gælder det stadig for $\mathbb{B}' := \{B_r(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$?

Bemærk først, at $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; den første inklusion er klar, og den anden følger, da hver åben kugle er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, hvormed $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{O}^n \subseteq \mathcal{B}$. Hvis vi kan vise, at $\sigma(\mathbb{B}') = \mathcal{B}$, følger, at $\mathcal{B} = \sigma(\mathbb{B}') \subseteq \sigma(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{B}$ jf. Opgave 3.3 (iii), hvormed opgaven er løst. Lad os prøve det!

Vi har klart, at $\mathbb{B}' \subseteq \mathcal{B}$ medfører $\sigma(\mathbb{B}') \subseteq \mathcal{B}$, idet $\mathcal{B}$ er en σ-algebra. Det er nok at vise, at $\mathcal{O}^n \subseteq \sigma(\mathbb{B}')$, thi da vil $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O}^n) \subseteq \sigma(\mathbb{B}')$. Lad derfor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben delmængde. Lad nu

$$V = \bigcup_{\substack{W \in \mathbb{B}' \\ W \subseteq U}} W,$$

altså: V er foreningen af alle åbne kugler på formen i $\mathbb{B}'$, som er indeholdt i U. Vi påstår, at V er lig U. Da hver $W \in \mathbb{B}'$ med $W \subseteq U$ er indeholdt i U (duh), følger at foreningen V af disse også er indeholdt i U, altså $V \subseteq U$.

Lad derfor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Vi vil vise, at der findes $B_s(q) \in \mathbb{B}'$ med $s \in \mathbb{Q}^+$, $q \in \mathbb{Q}^n$ og $B_s(q) \subseteq U$, så $x \in B_s(q)$; da vil $x \in W$ for et $W \in \mathbb{B}'$ med $W \subseteq U$, hvormed $x \in V$.

Da U er åben, findes en kugle $B_r(x) \subseteq U$ for $r > 0$. Lad $s \in \mathbb{Q}^+$ således at $0 < s < \frac{r}{2}$. For hvert $i = 1, \ldots, n$ vælges $q_i \in \mathbb{Q}$ således, at $|x_i - q_i| < \frac{s}{n}$ (de rationale tal $\mathbb{Q}$ ligger tæt i $\mathbb{R}$), og sæt $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Da vil

$$\|x - q\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i| < \sum_{i=1}^{n} \frac{s}{n} = s.$$

Altså vil $x \in B_s(q)$. For $y \in B_s(q)$ vil endvidere gælde, at

$$\|y - x\| \leq \|y - q\| + \|q - x\| < s + s < r,$$

hvormed $y \in B_r(x) \subseteq U$. Altså vil $B_s(q) \subseteq U$, og påstanden er vist.

Vi har nu skrevet

$$U = \bigcup_{\substack{W \in \mathbb{B}' \\ W \subseteq U}} W.$$

$\mathbb{B}'$ er tællelig: vi har nemlig en bijektion $\mathbb{B}' \to \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+$ givet ved $B_s(q) \mapsto (q,s)$. Da $\#\mathbb{Q}^n = \#\mathbb{N}$ og $\#\mathbb{Q}^+ = \#\mathbb{N}$ jf. Opgave 2.9 fra Uge 1, samt Example 2.5, vil $\#(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+) = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#\mathbb{N}$ jf. Example 2.5. Altså er ovenstående forening en tællelig forening, hvormed $U \in \sigma(\mathbb{B}')$, idet σ-algebraer er stabile under tællelige foreninger. Altså vil $\mathcal{O}^n \subseteq \sigma(\mathbb{B}')$, og vi er færdige.

Det ville dog være mest elegant, hvis vi direkte kunne nummerere alle $W \in \mathbb{B}'$ med $W \subseteq U$, således at vi kunne skrive $\{W \in \mathbb{B}' \,|\, W \subseteq U\} = \{W_1, W_2, \ldots\}$ og dermed have $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$, således at vi kunne bruge aksiomet (Σ_3) fra definitionen på en σ-algebra direkte og dermed undgå bare at sige "tællelig forening". Her er et argument for hvorfor det kan lade sig gøre i ovenstående tilfælde:

Sætning 3. *Lad X være en ikke-tom mængde med $\#X = \#\mathbb{N}$ og lad $D \subseteq X$ være en ikke-tom delmængde. Da findes en surjektion $\mathbb{N} \to D$.*

Bevis. Lad $f : \mathbb{N} \to X$ være en bijektion og lad $x \in D$ være fast. Definér $h : \mathbb{N} \to D$ ved

$$h(n) = \begin{cases} f(n) & \text{hvis } f(n) \in D \\ x & \text{hvis } f(n) \notin D. \end{cases}$$

h er da veldefineret, da alle de mulige funktionsværdier kun vil ligge i D. Hvis $y \in D$, vil specielt gælde, at $y \in X$, så der findes $n \in \mathbb{N}$ så $f(n) = y$. Da vil $f(n) = y \in D$, så $h(n) = f(n) = y$, hvormed h er surjektiv. (Her brugte vi faktisk kun, at der fandtes en surjektion $\mathbb{N} \to X$.) □

Da $\{W \in \mathbb{B}' \mid W \subseteq U\}$ er ikke-tom, findes jf. ovenstående en surjektiv afbildning

$$f : \mathbb{N} \to \{W \in \mathbb{B}' \mid W \subseteq U\}.$$

Sættes $W_n = f(n) \in \mathbb{B}'$ for $n \in \mathbb{N}$, vil

$$U = \bigcup_{\substack{W \in \mathbb{B}' \\ W \subseteq U}} W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \in \sigma(\mathbb{B}').$$

Overbevis dig selv om hvorfor andet lighedstegn gælder (brug inklusioner!).

4.2

Tjek, at funktionerne i Example 4.8 er mål efter Definition 4.1.

Vi nøjes med (i) og (ii) her.

(i)

Lad $(X, \mathcal{A})$ være et måleligt rum og lad $x \in X$ være et punkt. Vi definerer *Dirac-målet i x* eller *punktmassen i x* som værende $\delta_x : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ givet ved

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{hvis } x \notin A \end{cases}$$

for $A \in \mathcal{A}$.

Først og fremmest er $\mathcal{A}$ en σ-algebra pr. antagelse, så vi mangler bare at tjekke (M_1) og (M_2). Da $x \notin \emptyset$, må $\delta_x(\emptyset) = 0$, hvormed (M_1) gælder. Hvis $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ er en familie af parvist disjunkte mængder i $\mathcal{A}$, er der to muligheder:

1. Hvis $x \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, findes der ét $n \in \mathbb{N}$, så $x \in A_n$ (ikke flere, da A_n'erne er disjunkte). Dermed vil $\delta_x(A_n) = 1$, imens $\delta_x(A_j) = 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$ med $j \neq n$. Da $x \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, har vi dermed

$$\delta_x\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = 1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta_x(A_j).$$

2. Hvis $x \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, vil $x \notin A_j$ og dermed $\delta_x(A_j) = 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Altså vil

$$\delta_x\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = 0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta_x(A_j).$$

Altså er (M_2) også opfyldt. Dette viser, at δ_x er et mål på $(X, \mathcal{A})$.

(ii)

Lad $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ med $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ eller } A^c \text{ er tællelig}\}$. Vi definerer $\gamma \colon \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ ved

$$\gamma(A) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } A \text{ er tællelig} \\ 1 & \text{hvis } A^c \text{ er tællelig} \end{cases}$$

for $A \in \mathcal{A}$.

At $\mathcal{A}$ er en σ-algebra er vist i Example 3.3 (v). Da $\emptyset$ er tællelig, vil $\gamma(\emptyset) = 0$, så (M_1) er opfyldt. Lad nu $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ være en familie af parvist disjunkte mængder i $\mathcal{A}$. Da har vi to muligheder:

1. Hvis alle A_j'er er tællelige, er også $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ tællelig jf. Theorem 2.6. Derfor vil $\gamma(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = 0$. Da hver A_j er tællelig, vil $\gamma(A_j) = 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$ og dermed vil

$$\gamma\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = 0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(A_j).$$

2. Der findes et $n \in \mathbb{N}$ så A_n ikke er tællelig. Da $A_n \in \mathcal{A}$, må A_n^c være tællelig; idet

$$\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right)^c = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j^c \subseteq A_n^c,$$

må $(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j)^c$ være tællelig, så $\gamma(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = 1$. Hvis der fandtes et $m \neq n$, $m \in \mathbb{N}$, så A_m ikke var tællelig, ville $(A_m \cap A_n)^c = A_m^c \cup A_n^c$ være tællelig (da A_m^c også ville være tællelig). Dermed er $A_m \cap A_n$ overtællelig (hvis den ikke var, ville $\mathbb{R} = (A_m \cap A_n) \cup (A_m \cap A_n)^c$ være tællelig), men dermed må snittet være ikke-tomt – modstrid! Altså vil A_j være tællelig og dermed $\gamma(A_j) = 0$ for alle $j \neq n$, hvormed vi har

$$\gamma\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = 1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(A_j).$$

Altså er (M_2) også opfyldt. Dette viser, at γ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

4.6

Lad $(X, \mathcal{A})$ være et måleligt rum.

(i)

Lad μ, ν være to mål på $(X, \mathcal{A})$. Vis, at for alle $a, b \geq 0$ er funktionen $\rho(A) := a\mu(A) + b\nu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, igen et mål på $(X, \mathcal{A})$.

Først og fremmest vil $\rho(A) \in [0, \infty]$ for alle $A \in \mathcal{A}$. Da $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$, vil $\rho(\emptyset) = 0$, hvormed (M_1) er opfyldt for ρ. Er $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ en familie af parvist disjunkte mængder i $\mathcal{A}$, har vi, at

$$\begin{aligned} \rho\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) &= a\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) + b\nu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \\ &= a\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) + b\sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(A_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} (a\mu(A_j) + b\nu(A_j)) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \rho(A_j). \end{aligned}$$

Ovenstående gælder i hvert fald, hvis rækkerne er konvergente. Hvis fx $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) = \infty$, er det ikke svært at se, at både venstre- og højreside også må være lig ∞, ved at bruge at $\rho(A) \geq \mu(A)$ for alle $A \in \mathcal{A}$.

(ii)

Lad $\mu_1, \mu_2, \ldots$ være tælleligt mange mål på $(X, \mathcal{A})$ og lad $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være en følge af positive tal. Vis at $\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j(A)$ igen er et mål.

Vi viser først to lemmaer:

Lemma 4. *Lad* $(\beta_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ *være en familie af punkter i* $[0,\infty]$. *Da gælder*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Bevis. Lad os først antage, at $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij} < \infty$. For faste $i, j \in \mathbb{N}$ vil

$$\beta_{ij} \le \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij} \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Højresiden er uafhængig af i og j. Lad $i \in \mathbb{N}$ være fast. Da er $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}$ et overtal i $\mathbb{R}$ for β_{ij}'erne for alle j, så

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij} \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Højresiden er uafhængig af i. Da er $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}$ et overtal i $\mathbb{R}$ for $\sup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij}$ for alle i, så

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij} \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Den modsatte ulighed vises på samme måde.

Bemærk, at dette viser, at hvis det eneste supremum er $< \infty$, så må det andet også være det. Omformuleret: hvis en er lig ∞, er den anden det også. □

Lemma 5. *Lad* $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *være en familie af punkter i* $[0,\infty]$. *Da vil*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Bevis. Definér $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Antag først, at $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \infty$. Da vil (α_n) være en monotont voksende begrænset følge i $\mathbb{R}$; den konvergerer faktisk imod supremum (se Kalkulus, kapitel 4), så ovenstående lighed gælder. Hvis $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \infty$ gælder enten, at der findes i så $\beta_i = \infty$ eller at $\alpha_n \in \mathbb{R}$ for alle n; i begge tilfælde har vi $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \infty$. □

Vi er nu klar. Først og fremmest er $\alpha_j \ge 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$, og μ_j afbilder ind i $[0,\infty]$, så $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j(A) \in [0,\infty]$ for alle $A \in \mathcal{A}$, ergo er μ veldefineret. Vi tjekker nu aksiomerne:

Da $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0$, følger (M_1).

Lad $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en familie af parvist disjunkte mængder i $\mathcal{A}$. Da vil

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\mu_j\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu_j(A_i)\right)\\
&\overset{\text{L5}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\mu_j(A_i)\right)\\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j(A_i)\right)\\
&\overset{\text{L5}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j(A_i)\\
&\overset{\text{L4}}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j(A_i)\\
&\overset{\text{L5}}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j(A_i)\right)\\
&= \sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\mu_j(A_i)}_{\mu(A_i)}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i),
\end{aligned}$$

som ønsket. Da vi benyttede L4 (Lemma 4), byttede vi også om på sumtegnene, hvilket er lovligt.

4.7

Lad $(X,\mathcal{A},\mu)$ være et målrum og lad $F\in\mathcal{A}$. Vis, at $\mathcal{A}\ni A\mapsto\mu(A\cap F)$ definerer et mål.

Først og fremmest er $\mu'\colon\mathcal{A}\to[0,\infty]$ givet ved $\mu'(A)=\mu(A\cap F)$ veldefineret: $A\cap F\in\mathcal{A}$ for alle $A\in\mathcal{A}$, og da μ antager værdier i $[0,\infty]$, vil også μ' gøre det. Idet $\emptyset\cap F=\emptyset$, følger at $\mu'(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$ ved (M_1) for μ, således at (M_1) er opfyldt for μ'. Lad nu $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være en familie af parvist disjunkte mængder i $\mathcal{A}$. Da vil

$$\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)\cap F=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_j\cap F).$$

For $i\neq j$ er $A_i\cap F$ og $A_j\cap F$ disjunkte (ellers ville A_i og A_j ikke være disjunkte); så vi har ved at bruge (M_2) for μ at

$$\mu'\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j)\right)=\mu\left(\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)\cap F\right)=\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_j\cap F)\right)\overset{(M_2)}{=}\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu(A_j\cap F)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu'(A_j),$$

således at (M_2) er opfyldt for μ'.

4.9

Lad $(X,\mathcal{A},\mu)$ være et endeligt målrum og lad $(A_j)_{j\in\mathbb{N}},(B_j)_{j\in\mathbb{N}}\subseteq A$ således at $A_j\supseteq B_j$ for alle $j\in\mathbb{N}$. Vis, at

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)-\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}B_j\right)\leq\sum_{j\in\mathbb{N}}(\mu(A_j)-\mu(B_j)).$$

[Hint: vis først, at $\bigcup_j A_j \setminus \bigcup_j B_j \subseteq \bigcup_j (A_j \setminus B_j)$.]

Lad $x \in X$. Hvis $x \in \bigcup_j A_j \setminus \bigcup_j B_j$, findes $j_0 \in \mathbb{N}$ så $x \in A_{j_0}$. Da $x \notin \bigcup_j B_j$, vil $x \notin B_j$ for alle j, så specielt vil $x \notin B_{j_0}$, hvormed $x \in A_{j_0} \setminus B_{j_0} \subseteq \bigcup_j (A_j \setminus B_j)$. Altså er hintet vist.

Da $A_j \supseteq B_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$, vil $\bigcup_j A_j \supseteq \bigcup_j B_j$. Da X er et endeligt målrum, vil $\mu(\bigcup_j A_j) \leq \mu(X) < \infty$ jf. Proposition 4.3 (ii), så vi har

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) &\overset{4.3(\text{iii})}{=} \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) \\ &\overset{4.3(\text{ii})}{\leq} \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \setminus B_j\right) \\ &\overset{4.6}{\leq} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j \setminus B_j) \\ &\overset{4.3(\text{iii})}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} (\mu(A_j) - \mu(B_j)), \end{aligned}$$

idet $\mu(A_j) < \infty$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

4.10

Nulmængder. Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrum. En mængde $N \in \mathcal{A}$ kaldes en *nulmængde* eller en *μ-nulmængde* hvis $\mu(N) = 0$. Vi betegner familien af alle nulmængder i $\mathcal{A}$ med $\mathcal{N}_\mu$. Vis, at $\mathcal{N}_\mu$ har følgende egenskaber:

(i)

$\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$.

Dette følger af definitionen på et mål! (Vi har $\mu(\emptyset) = 0$.)

(ii)

Hvis $N \in \mathcal{N}_\mu$, $M \in \mathcal{A}$ og $M \subseteq N$, vil $M \in \mathcal{N}_\mu$.

Da $M \in \mathcal{A}$, findes $\mu(M)$ (μ er kun defineret på $\mathcal{A}$). Grundet monotoni (Proposition 4.3 (ii)), vil $\mu(M) \leq \mu(N) = 0$, da $N \in \mathcal{N}_\mu$. Da $\mu(M) \geq 0$ pr. definitionen på et mål, vil $0 \leq \mu(M) \leq 0$, så $\mu(M) = 0$ og $M \in \mathcal{N}_\mu$.

(iii)

Hvis $(N_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}_\mu$, vil $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \in \mathcal{N}_\mu$.

Grundet subadditivitet (Corollary 4.6) vil

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(N_j) = 0,$$

hvormed $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \in \mathcal{N}_\mu$

4.11

Lad λ være det endimensionale Lebesgue-mål.

(i)

Vis, at $\{x\}$ er en Borel-mængde med $\mu(\{x\}) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi gentager beviset for Sætning 1 i det endimensionale tilfælde. $\{x\}$ er afsluttet og dermed en Borel-mængde. Beviset for Theorem 4.4 giver, at (iii') gælder for alle mål. Definer $y_n = x + \frac{1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da vil

$$A_n = \left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

være en Borel-mængde. Da vi har, at $A_n \subseteq A_m$ for $m \leq n$, er følgen (A_n) aftagende. Endvidere er $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$, så jf. (iii') vil

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

som ønsket.

(ii)

Vis, at $\mathbb{Q}$ er en Borel-mængde med $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ på to måder:

a) ved at bruge (i);

b) ved at betragte mængden $C(\varepsilon) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[q_k - \varepsilon 2^{-k}, q_k + \varepsilon 2^{-k})$, hvor $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en nummerering af $\mathbb{Q}$, og lade $\varepsilon \to 0$.

Ad a): Da $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$, findes en bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Definér $x_n = f(n)$ for $n \in \mathbb{N}$. Da vil

$$\mathbb{Q} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x_j\}.$$

Alle etpunktsmængderne er disjunkte, da f er injektiv. Vi har derfor pr. (i), at

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(\{x_j\}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

Ad b). Lad q_k være en nummerering af $\mathbb{Q}$ og lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt. Da har vi, at $\mathbb{Q} \subseteq C(\varepsilon)$. Jf. Proposition 4.3 (ii) og Corollary 4.6 og har vi, at

$$\lambda(\mathbb{Q}) \overset{4.3}{\leq} \lambda(C(\varepsilon)) \overset{4.6}{\leq} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda([q_k - \varepsilon 2^{-k}, q_k + \varepsilon 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\varepsilon 2^{-k} = 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårligt, kan vi lade $\varepsilon \to 0$, hvormed $\lambda(\mathbb{Q}) \leq 0$ og dermed $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(iii)

Brug det trivielle faktum at $[0,1] = \bigcup_{0\leq x\leq 1}\{x\}$ til at vise at en ikke-tællelig forening af nulmængder ikke nødvendigvis er en nulmængde.

Hver $\{x\}$ ovenfor er en nulmængde, men $\lambda([0,1]) = \lambda([0,1)) + \lambda(\{1\}) = 1$.

4.12

Bestem alle nulmængder for målet $\delta = \delta_a + \delta_b$, $a, b \in \mathbb{R}$ på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Vi har først og fremmest, at δ er et mål jf. Opgave 4.6 (i). Antag, at $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da vil

$$\delta(A) = \delta_a(A) + \delta_b(A) = \begin{cases} 2 & \text{hvis } a \in A \text{ og } b \in A \\ 1 & \text{hvis } a \in A \text{ og } b \notin A \textbf{ eller } a \notin A \text{ og } b \in A \\ 0 & \text{hvis } a \notin A \text{ og } b \notin A. \end{cases}$$

Altså vil A være en nulmængde for $\delta_a + \delta_b$ hvis og kun hvis $a \notin A$ og $b \notin A$.

(4.15)

Vis, at et målrum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er σ-endeligt hvis og kun hvis der findes en følge $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ af målelige mængder således at $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = X$ og $\mu(E_j) < \infty$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

Det er klart, at betingelsen til sidst er opfyldt hvis målrummet er σ-endeligt (for at $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er σ-endeligt, kræves at følgen af mængder er voksende, dvs. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$). Lad derfor $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være en følge af målelige mængder således at $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = X$ og $\mu(E_j) < \infty$.

Definér $A_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$ for $n \in \mathbb{N}$. Da vil $A_m \subseteq A_n$ for $m \leq n$ og hvis $x \in X$, findes $m \in \mathbb{N}$ så $x \in E_m \subseteq A_n$, hvormed $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Slutteligt følger af Corollary 4.6 eller Proposition 4.3 at

$$\mu(A_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) < \infty,$$

hvormed $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er σ-endeligt.