Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

17. og 20. september 2013

Supplerende opgave 1

Lad λ være Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$ og lad $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Definér en funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ved $f(x) = \lambda(A \cap [-x,x])$.

(i)

Vis, at $|f(x) - f(y)| \le 2|x-y|$ for alle $x, y \ge 0$. Konkludér, at f er kontinuert.

Antag, at $x, y \ge 0$. Vi kan uden tab af generalitet antage, at $x \ge y$. Da vil $A \cap [-y,y] \subseteq A \cap [-x,x]$ og

$$(A \cap [-x,x]) \setminus (A \cap [-y,y]) = A \cap ([-x,-y) \cup (y,x]).$$

Da $\lambda(A \cap [-x,x]) \le \lambda([-x,x]) = 2x < \infty$ jf. Proposition 4.3 (ii), har vi nu jf. Proposition 4.3, at

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \lambda(A \cap [-x,x]) - \lambda(A \cap [-y,y]) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \lambda\left((A \cap [-x,x]) \setminus (A \cap [-y,y])\right) \\
&= \lambda\left(A \cap ([-x,-y) \cup (y,x])\right) \\
&\overset{\text{(ii)}}{\le} \lambda([-x,-y) \cup (y,x]) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \lambda([-x,-y)) + \lambda((y,x]) \\
&= (-y - (-x)) + (x - y) \\
&= 2(x-y).
\end{aligned}$$

Da $f(x) \ge f(y)$ og $x \ge y$, følger dermed, at $|f(x) - f(y)| \le 2|x-y|$. Dermed er f (uniformt) kontinuert, idet det er en Lipschitz-afbildning: for ethvert $\varepsilon > 0$ vil der gælde for $x, y \ge 0$ med $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, at $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(ii)

Bestem $f(0)$ og $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Bemærk, at $f(x) \ge 0$ for alle $x \in [0,\infty)$. Da $f(0) = \lambda(A \cap \{0\}) \le \lambda(\{0\}) = 0$ jf. Proposition 4.3 (ii), følger at $f(0) = 0$.

Vi gætter nu på, at $f(x) \to \lambda(A)$ for $x \to \infty$ (det virker mest oplagt). Bemærk, at vi i stedet for at se på $f(x)$ i grænseovergangen $x \to \infty$ kan nøjes med at betragte følgen $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ for $n \to \infty$. Dette følger direkte af at betragte definitionerne for de to grænseovergange (prøv selv at se; husk at det enten kan være at $\lambda(A) < \infty$ eller $\lambda(A) = \infty$). Sætter vi $A_n = A \cap [-n,n]$ for $n \in \mathbb{N}$, har vi at $A_m \subseteq A_n$ for $m \le n$, samt at $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n] = A \cap \mathbb{R} = A$, så jf. Theorem 4.4 (iii) følger, at

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

(iii)

Antag, at $\lambda(A) < \infty$. Vis, at der findes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ så $B \subseteq A$ og $\lambda(B) = \frac{1}{2}\lambda(A)$.

Det hurtige argument: f er kontinuert, $f(0) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda(A)$. Grundet kontinuitet må altså findes $x_0 \in [0,\infty)$ så $f(x_0) = \frac{1}{2}\lambda(A)$. Sættes $B = A \cap [-x_0, x_0]$, vil $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B \subseteq A$ og $\lambda(B) = f(x_0) = \frac{1}{2}\lambda(A)$.

Et mindre hurtigt argument: bemærk, at $f(x) \leq \lambda(A)$ for alle $x \in [0,\infty)$. Idet $f(x) \to \lambda(A)$ for $x \to \infty$, findes $K \geq 0$ således at

$$\lambda(A) - f(x) = |f(x) - \lambda(A)| < \frac{1}{2}\lambda(A)$$

for $x > K$. Dermed vil $f(x) > \frac{1}{2}\lambda(A)$ for $x > K$. Betragt nu f på intervallet $[0, K+1]$. Vi har da, at

$$\frac{1}{2}\lambda(A) < f(K+1) \leq \lambda(A).$$

Jf. Hovedsætning 2A fra Analyse 0, vil billedmængden $f([0, K+1])$ indeholde alle tal mellem $f(0)$ og $f(K+1)$, idet f er kontinuert på det afsluttede og begrænsede interval $[0, K+1]$. Da

$$f(0) = 0 \leq \frac{1}{2}\lambda(A) < f(K+1),$$

findes derfor et $x_0 \in [0, K+1]$ således at $f(x_0) = \frac{1}{2}\lambda(A)$. Da $A \cap [-x_0, x_0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ og $A \cap [-x_0, x_0] \subseteq A$, kan vi sætte $B = A \cap [-x_0, x_0]$ og dermed få

$$\lambda(B) = f(x_0) = \frac{1}{2}\lambda(A),$$

således at B opfylder det ønskede.

7.1

Brug Lemma 7.2 til at vise at τ_x fra (7.2), altså $\tau_x(y) = y - x$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, er $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}^n$-målelig.

Vi gør hvad Christian fandt på: $\mathcal{B}^n$ er frembragt af mængder på formen $A = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. For $x = (x_1, \ldots, x_n)$, vil

$$\begin{aligned}\tau_x^{-1}(A) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid y - x \in A\} \\ &= [a_1 + x_1, b_1 + x_1) \times \cdots \times [a_n + x_n, b_n + x_n) \in \mathcal{B}^n.\end{aligned}$$

Jf. Lemma 7.2 vil $\tau_x^{-1}(\mathcal{B}^n) \subseteq \mathcal{B}^n$. Alternativt kan benyttes, at τ_x er kontinuert og at $\tau_x^{-1}(G)$ er åben for åbne $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

7.3

Lad X være en mængde, lad $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$ være vilkårligt mange målelige rum, og lad $T_i \colon X \to X_i$ være en familie af afbildninger.

(i)

Vis for alle $i \in I$, at $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ er den mindste σ-algebra i X således at T_i bliver målelig.

Lad $i \in I$. Først og fremmest er $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ en σ-algebra der gør T_i-målelig; dette følger af Example 3.3 (vii) samt faktum, at T_i er $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)/\mathcal{A}_i$-målelig helt trivielt jf. definitionen på målelighed. Hvis $\mathcal{A}$ er en σ-algebra i X således at T_i er $\mathcal{A}/\mathcal{A}_i$-målelig, da vil $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}$. Lad derfor $\mathcal{A}$ være en sådan σ-algebra i X. Da vil $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}$ jf. måleligheden af T_i, hvilket giver det ønskede.

(ii)

Vis, at $\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$ er den mindste σ-algebra i X som gør alle T_i, $i \in I$, målelige på én gang. (Vis Lemma og Definition 7.5.)

Først og fremmest er $\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$ en σ-algebra der gør alle T_i målelige; at det er en σ-algebra er klart, og idet $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$ pr. definitionen, følger at alle T_i'er er $\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i))/\mathcal{A}_i$-målelige. Vi skal til sidst vise, at hvis $\mathcal{A}$ er en σ-algebra i X således at T_i er $\mathcal{A}/\mathcal{A}_i$-målelig for alle $i \in I$, da vil $\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)) \subseteq \mathcal{A}$. Lad $\mathcal{A}$ være en sådan σ-algebra. Det er da nok at vise, at $\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}$; da vil $\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)) \subseteq \mathcal{A}$ jf. Remarks 3.5 (i) og (iii). Altså skal vi vise, at $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}$ for alle $i \in I$, men dette følger som i (i) direkte af definitionen på målelighed.

7.4

Lad X være en mængde, lad $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$ være vilkårligt mange målelige rum, og lad $T_i \colon X \to X_i$ være en familie af afbildninger. Vis, at en afbildning f fra et måleligt rum $(F, \mathscr{F})$ til $(X, \sigma(T_i : i \in I))$ er målelig hvis og kun hvis $T_i \circ f$ er $\mathscr{F}/\mathcal{A}_i$-målelig for alle $i \in I$.

Husk, at

$$\sigma(T_i : i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$$

jf. Definition 7.5. For hvert $i \in I$ er T_i vitterlig $\sigma(T_i : i \in I)/\mathcal{A}_i$-målelig, thi

$$T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \sigma(T_i : i \in I).$$

Dette skal vi benytte om ikke så længe. Lad $f \colon F \to X$ være en afbildning.

Antag først, at f er $\mathscr{F}/\sigma(T_i : i \in I)$-målelig og lad $i \in I$. Vi skal da vise, at

$$(T_i \circ f)^{-1}(A) \in \mathscr{F} \text{ for alle } A \in \mathcal{A}_i$$

for at konkludere, at $T_i \circ f$ er $\mathscr{F}/\mathcal{A}_i$-målelig. Lad $A \in \mathcal{A}_i$. Da vil $T_i^{-1}(A) \in T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \sigma(T_i : i \in I)$ jf. ovenstående, hvormed

$$f^{-1}(T_i^{-1}(A)) \in \mathscr{F},$$

da f er $\mathscr{F}/\sigma(T_i : i \in I)$-målelig. Vi er nu færdige, idet $f^{-1}(T_i^{-1}(A)) = (T_i \circ f)^{-1}(A)$.

Antag omvendt, at $T_i \circ f$ er $\mathscr{F}/\mathcal{A}_i$-målelig for alle $i \in I$. For at vise, at f er $\mathscr{F}/\sigma(T_i : i \in I)$-målelig, er det nok jf. Lemma 7.2 at vise, at $f^{-1}(G) \in \mathscr{F}$ for alle $G \in \bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$. Lad derfor $G \in \bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$. Da findes $i \in I$ så $G \in T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$. Altså findes $A \in \mathcal{A}_i$ således at $G = T_i^{-1}(A)$. Da $T_i \circ f$ er $\mathscr{F}/\mathcal{A}_i$-målelig, vil vi nu have

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(T_i^{-1}(A)) = (T_i \circ f)^{-1}(A) \in \mathscr{F},$$

og dermed har vi vist det ønskede.

7.5

Brug Opgave 7.4 til at vise, at en funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ er målelig hvis og kun hvis alle koordinatafbildninger $f_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, er målelige.

Bemærk først, at afbildningerne $\pi_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, givet ved $p_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$ for $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ er kontinuerte og dermed $\mathcal{B}^m/\mathcal{B}$-målelige jf. Example 7.3. Vi definerer nu $I = \{1, \dots, m\}$ samt $T_i := \pi_i$ og $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}$ for $i \in I$. Vi har da, at $f_i = T_i \circ f$ for alle $i \in I$. Jf. Opgave 7.4 har vi derfor, at

$$f \text{ er } \mathcal{B}^n/\sigma(T_i : i \in I)\text{-målelig} \Leftrightarrow f_i \text{ er } \mathcal{B}^m/\mathcal{B}\text{-målelig for alle } i \in I.$$

Lad os til slut vise, at $\sigma(T_i : i \in I) = \mathcal{B}^m$. Da T_i er kontinuert og dermed $\mathcal{B}^m/\mathcal{B}$-målelig for alle $i \in I$, har vi derfor, at $\sigma(T_i : i \in I) \subseteq \mathcal{B}^m$ jf. Opgave 7.3 (ii). For at vise den anden inklusion, er det nok at vise, at $\mathcal{J}^m \subseteq \sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{B}))$, hvor $\mathcal{J}^m = \{[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_m,b_m) \mid a_i,b_i\in\mathbb{R}\}$ (se Kapitel 3), idet dette mængdesystem frembringer Borel-algebraen $\mathcal{B}^m$ jf. Theorem 3.8, men dette følger af ligheden

$$[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_m,b_m) = T_1^{-1}([a_1,b_1))\cap\cdots\cap T_m^{-1}([a_m,b_m)),$$

og af at højresiden er indeholdt i $\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{B}))$. Altså følger $\sigma(T_i : i\in I) = \mathcal{B}^m$, hvormed vi har det ønskede.

7.8

Lad $T\colon X\to Y$ være en hvilken som helst afbildning. Vis, at $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))$ gælder for vilkårlige familier $\mathcal{G}$ af delmængder af Y.

Lad $\mathcal{G}$ være en familie af delmængder af Y. Vi skal vise, at

$$T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{G})) = \sigma(\{T^{-1}(G)\mid G\in\mathcal{G}\}).$$

Idet $\sigma(\mathcal{G})$ er en σ-algebra, følger af Example 3.3 (vii) (som vi viste i Opgave 3.2), at $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$ er en σ-algebra. Idet

$$\{T^{-1}(G)\mid G\in\mathcal{G}\}\subseteq\{T^{-1}(A)\mid A\in\sigma(\mathcal{G})\} = T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})),$$

følger nu af Remark 3.5 (iii) og (i), at

$$\sigma(\{T^{-1}(G)\mid G\in\mathcal{G}\})\subseteq T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})).$$

Altså har vi vist $\sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))\subseteq T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$.

Vi mangler at vise $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))\subseteq\sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))$. Bemærk, at dette er ækvivalent med, pr. Definition 7.1, at T er $\sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))/\sigma(\mathcal{G})$-målelig. Jf. Lemma 7.2 er det derfor nok at vise, at $T^{-1}(\mathcal{G})\subseteq\sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))$, men dette er klart jf. Definition 3.4.

8.3

Lad $(X,\mathcal{A})$ være et måleligt rum.

(i)

Lad $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ være målelige funktioner. Vis at for ethvert $A\in\mathcal{A}$ vil funktionen

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x\in A \\ g(x) & x\notin A\end{cases}$$

være målelig.

Bemærk, at $h(x) = f(x)1_A(x) + g(x)1_{A^c}(x)$ for alle $x\in X$. Siden summer og produkter af målelige funktioner er målelige jf. Corollary 8.10 og indikatorfunktioner er målelige jf. Example 8.5 (i), følger, at h er målelig.

(ii)

Lad $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være en følge af målelige funktioner $X\to\mathbb{R}$ og lad $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}$ således at $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$. Antag, at $f_j|_{A_j\cap A_k} = f_k|_{A_j\cap A_k}$ for alle $j,k\in\mathbb{N}$ og definér $f(x) := f_j(x)$ hvis $x\in A_j$. Vis, at $f\colon X\to\mathbb{R}$ er målelig.

Antagelsen om at $f_j|_{A_j\cap A_k} = f_k|_{A_j\cap A_k}$ for alle $j,k\in\mathbb{N}$ sørger for at f er veldefineret; hvis $x\in A_j$ og $x\in A_k$, vil $f_j(x) = f_k(x)$, så værdien af x under f er entydig. Hvis $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vil

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B)\cap X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-1}(B)\cap A_j.$$

Hvis $x\in f^{-1}(B)\cap A_j$, vil $x\in A_j$, så $B\ni f(x) = f_j(x)$, hvormed $x\in f_j^{-1}(B)\cap A_j$. Omvendt vil $x\in f_j^{-1}(B)\cap A_j$ medføre, at $x\in A_j$ hvormed $f(x) = f_j(x)\in B$, så $x\in f^{-1}(B)\cap A_j$. Altså har vi, at

$$f^{-1}(B)\cap A_j = f_j^{-1}(B)\cap A_j$$

for alle $j \in \mathbb{N}$, hvormed

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B) \cap A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{f_j^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}} \cap A_j \in \mathcal{A},$$

idet hver f_j er målelig og $\mathcal{A}$ er en σ-algebra.

8.5

Vis, at $f \in \mathcal{E}$ medfører $f^{\pm} \in \mathcal{E}$. Gælder det også den anden vej?

Skriv

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} y_j 1_{A_j}(x) \tag{$\star$}$$

for $y_1, \ldots, y_M \in \mathbb{R}$ og målelige $A_1, \ldots, A_M \in \mathcal{A}$. Vi kan endvidere antage, at A_j'erne er disjunkte. Nu påstår vi, at

$$f^+(x) = \sum_{\substack{1 \le j \le M \\ y_j \ge 0}} y_j 1_{A_j}(x), \quad f^-(x) = \sum_{\substack{1 \le j \le M \\ y_j \le 0}} (-y_j) 1_{A_j}(x). \tag{$\dagger$}$$

Hvis vi kan vise dette, fremgår direkte, at $f^{\pm} \in \mathcal{E}$. Lad $x \in X$. Hvis $x \notin A_j$ for alle $j = 1, \ldots, M$, vil $f(x) = 0$ jf. ($\star$) og summerne i ($\dagger$) er også lig 0. Da

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = 0, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = 0,$$

følger lighederne i ($\dagger$) altså i dette tilfælde. Vi kan derfor antage, at $x \in A_j$ for et $j = 1, \ldots, M$. Da vil $f(x) = y_j$. Hvis $y_j > 0$, vil $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = y_j$ og $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = 0$. Da den første sum i ($\dagger$) er lig y_j og den anden sum er lig 0, slutter vi lighed i ($\dagger$). Tilfældene $y_j = 0$ og $y_j < 0$ kan vises på samme vis, og vi får derfor det ønskede.

Vi viser i Opgave 8.6, at $f = f^+ - f^-$ for enhver reel funktion f. Hvis $f^{\pm} \in \mathcal{E}$, følger derfor af Examples 8.7 (iv), at $f \in \mathcal{E}$.

8.6

Vis, at for enhver reel funktion u at $u = u^+ - u^-$ og at $|u| = u^+ + u^-$.

Lad $u \colon X \to \mathbb{R}$ være en reel funktion. Der er to tilfælde:

1. Hvis $u(x) \geq 0$, vil $u^+(x) = \max\{u(x), 0\} = u(x)$ og $u^-(x) = -\min\{u(x), 0\} = 0$, hvormed $u^+(x) - u^-(x) = u(x)$ og $u^+(x) + u^-(x) = u(x) = |u(x)|$.
2. Hvis $u(x) < 0$, vil $u^+(x) = \max\{u(x), 0\} = 0$ og $u^-(x) = -\min\{u(x), 0\} = -u(x)$. Da vil $u^+(x) - u^-(x) = u(x)$ og $u^+(x) + u^-(x) = -u(x) = |u(x)|$.

8.8

Vis, at enhver kontinuert funktion $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelig. [Vis, at $\{u > \alpha\}$ er åben.]

Vi benytter Lemma 8.1 til at vise dette og vil gerne vise, at $\{u > \alpha\} \in \mathcal{B}$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Det er nok at vise, at $\{u > \alpha\}$ er åben, thi de åbne delmængder af $\mathbb{R}$ frembringer Borel-algebraen $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Antag derfor, at $x \in \{u > \alpha\}$. Altså vil $u(x) > \alpha$. Lad $\varepsilon > 0$ så $u(x) > u(x) - \varepsilon > \alpha$, fx ved at sætte $\varepsilon = \frac{1}{2}(u(x) - \alpha)$. Da u er kontinuert i x, findes nu $\delta > 0$ således at $y \in \mathbb{R}$ og $|y - x| < \delta$ medfører $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$. Altså vil $y \in (x - \delta, x + \delta)$ medføre, at $u(x) - u(y) < \varepsilon$, hvilket i sig selv medfører $u(y) > \alpha$. Altså vil $(x - \delta, x + \delta) \subseteq \{u > \alpha\}$, så vi har altså vist, at $\{u > \alpha\}$ er åben.

8.12

Lad $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være differentiabel. Forklar hvorfor u og $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ er målelig.

u er differentiabel og dermed kontinuert, hvormed Opgave 8.8 giver, at u er målelig. For $j \in \mathbb{N}$ definerer vi $u_j : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ved

$$u_j(x) = \frac{u(x + \frac{1}{j}) - u(x)}{(x + \frac{1}{j}) - x} = j \cdot (u(x + \frac{1}{j}) - u(x)).$$

Da u og $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ er målelige, følger af Theorem 7.4, at $x \mapsto u(x + \frac{1}{n})$ er målelig. Dermed følger af Corollary 8.10, at hver u_j er målelig. Bemærk nu, at

$$u_j(x) = \frac{u(x + \frac{1}{j}) - u(x)}{(x + \frac{1}{j}) - x} \to u'(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$, når $j \to \infty$. Altså eksisterer $\lim_{j\to\infty} u_j$ på hele $\mathbb{R}$, hvormed vi slutter af Corollary 8.9, at $u' = \lim_{j\to\infty} u_j$ er målelig.

(8.13)

Find $\sigma(u)$, dvs. σ-algebraen genereret af u, for de følgende funktioner:

(i)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x$.

Vi har jf. Opgave 7.3, at $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B})$. Da f er bijektiv med $f^{-1}(y) = y$, er $\sigma(f) = \mathcal{B}$.

(ii)

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $g(x) = x^2$.

Vi har, at

$$\sigma(g) = g^{-1}(\mathcal{B}) = \{g^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Lad $B \in \mathcal{B}$. For $x \in g^{-1}(B)$, vil $g(x) = x^2 \in B$. Der findes derfor $y \in B$ så $y = x^2$. Altså vil $y \in [0,\infty)$. Enten vil $x = -\sqrt{y}$ eller $x = \sqrt{y}$, hvormed vi altså har, at

$$x \in \sqrt{B \cap [0,\infty)} = \{\sqrt{y} \mid y \in B \cap [0,\infty)\} \text{ eller } x \in -\sqrt{B \cap [0,\infty)} = \{-\sqrt{y} \mid y \in B \cap [0,\infty)\}$$

eller $x \in \sqrt{B \cap [0,\infty)} \cup (-\sqrt{B \cap [0,\infty)})$. Hvis vi omvendt har, at x tilhører en af de to ovenstående mængder, vil $x^2 \in B$, hvormed $x \in g^{-1}(B)$. Vi har altså, at $g^{-1}(B) = \sqrt{B \cap [0,\infty)} \cup (-\sqrt{B \cap [0,\infty)})$, hvormed

$$\sigma(g) = \{g^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\} = \{\sqrt{B \cap [0,\infty)} \cup (-\sqrt{B \cap [0,\infty)}) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Da $B \cap [0,\infty) \in \mathcal{B}$ for alle $B \in \mathcal{B}$, kan vi omskrive ovenstående således at vi kun betragter $B \in \mathcal{B}$ med $B = B \cap [0,\infty)$, dvs. $B \subseteq [0,\infty)$, således at

$$\sigma(g) = \{\sqrt{B} \cup (-\sqrt{B}) \mid B \in \mathcal{B},\ B \subseteq [0,\infty)\}.$$

(iii)

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $h(x) = |x|$.

Vi benytter samme metode som ovenfor. Hvis $B \in \mathcal{B}$ og $x \in h^{-1}(B)$, vil $|x| \in B$. Tages $y \in B$ så $y = |x|$, vil $y \in [0,\infty)$. Desuden vil enten gælde, at $x = y$ eller $x = -y$, hvormed

$$x \in B \cap [0,\infty) \text{ eller } x \in -(B \cap [0,\infty)) = \{-y \mid y \in B \cap [0,\infty)\}$$

eller $x \in (B \cap [0,\infty)) \cup (-(B \cap [0,\infty))$. Omvendt haves, at hvis $x = y$ eller $x = -y$ for $y \in B \cap [0,\infty)$, vil $|x| = |y| = y$, hvormed $x \in h^{-1}(B)$. Altså vil

$$h^{-1}(B) = (B \cap [0,\infty)) \cup (-(B \cap [0,\infty)),$$

så ligesom i (ii) har vi

$$\sigma(h) = \{(B \cap [0,\infty)) \cup (-(B \cap [0,\infty)) \mid B \in \mathcal{B}\} = \{B \cup (-B) \mid B \in \mathcal{B},\ B \subseteq [0,\infty)\}.$$

(iv)

$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x,y) = x + y$.

Igen samme metode som i (ii) og (iii), men for letheds skyld begynder vi i stedet for generelt $B \in \mathcal{B}$ med at betragte et afsluttet begrænset interval $B = [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ (de afsluttede begrænsede intervaller frembringer $\mathcal{B}$). Dette er for at få et mere klart billede af situationen. Da

$$F^{-1}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x + y \leq \beta\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha - x \leq y \leq \beta - x\},$$

er dette urbillede mængden af punkter i planen imellem linjerne $y = \alpha - x$ og $y = \beta - x$; en form for "striber" i planen, der står skråt nedad. De kan visualiseres mere i overensstemmelse med vores formål ved at betragte intervallet $[\alpha,\beta]$ på x-aksen og derpå tegne linjer med hældning -1 igennem $(\alpha,0)$ og $(\beta,0)$; da vil $F^{-1}(B)$ være punktmængden begrænset af de to fremkomne linjer. Ethvert element i $F^{-1}(B)$ vil således ligge på en linje med hældning -1 som går igennem et punkt $(x,0)$ hvor $\alpha \leq x \leq b$. Mere generelt får vi for $B \in \mathcal{B}$ at $F^{-1}(B)$ er mængden af linjer med hældning -1 som går igennem $(\alpha,0)$ for et $\alpha \in B$. Derfor vil

$$\sigma(F) = \{\text{mængder af linjer med hældning } -1 \text{ således at skæringerne med } x\text{-aksen er en mængde i } \mathcal{B}\}.$$

(v)

$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $G(x,y) = x^2 + y^2$.

Vi kunne starte med intervaller igen, men lad os bare gøre det her hurtigt. For $B \in \mathcal{B}$ vil $(x,y) \in G^{-1}(B)$ medføre $x^2 + y^2 \in B$. Altså findes $s \in B$ så $x^2 + y^2 = s$, hvormed $s \in [0,\infty)$. Sætter vi $r = \sqrt{s}$, har vi altså at $x^2 + y^2 = r^2$. Altså er (x,y) et punkt på cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius lig $\sqrt{s}$ for $s \in B \cap [0,\infty)$. Bemærk, at cirklen går igennem $(\sqrt{s},0)$, eller $\sqrt{s}$ på den reelle (første-)akse. Omvendt indses, at sådanne (x,y) vil være indeholdt i $G^{-1}(B)$. Altså vil

$$\sigma(G) = \{\text{mængder af cirkler med centrum } (0,0) \text{ med radier } r \text{ så } r^2 \in B \mid B \in \mathcal{B},\ B \subseteq [0,\infty)\}$$

8.14

Betragt $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ og $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vis, at $\{x\} \in \sigma(u)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ hvis og kun hvis u er injektiv.

Antag, at $\{x\} \in \sigma(u)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og at $u(x) = u(y)$ for $x,y \in \mathbb{R}$. Vi skal vise, at $x = y$, således at u er injektiv. Idet $\{x\},\{y\} \in \sigma(u) = u^{-1}(\mathcal{B})$, findes Borel-mængder $A,B \in \mathcal{B}$ så $\{x\} = u^{-1}(A)$ og $\{y\} = u^{-1}(B)$. Altså vil $u(x) \in A$ og $u(y) \in B$. Da $u(x) = u(y)$, vil $u(x) \in B$, hvormed $x \in u^{-1}(B) = \{y\}$. Altså må $x = y$.

Antag omvendt, at u er injektiv og lad $x \in \mathbb{R}$. Vi skal vise, at $\{x\} \in u^{-1}(\mathcal{B})$, og altså at der findes en Borel-mængde $B \in \mathcal{B}$ så $\{x\} = u^{-1}(B)$. Lad $B = \{u(x)\}$. Da er B afsluttet i $\mathbb{R}$, og dermed vil $B \in \mathcal{B}$. Da $u(x) \in B$, vil $x \in u^{-1}(B)$, hvormed $\{x\} \subseteq u^{-1}(B)$. Hvis $y \in u^{-1}(B)$, vil $u(y) \in B$, således at $u(y) = u(x)$. Da u er injektiv, vil $y = x$, således at $u^{-1}(B) \subseteq \{x\}$. Altså vil $u^{-1}(B) = \{x\}$, og det ønskede er vist.

8.16

Lad $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være målelig. Hvilke af følgende funktioner er målelige:

$$u(x-2), \quad e^{u(x)}, \quad \sin(u(x)+8), \quad u''(x), \quad \operatorname{sgn}(u(x-7))?$$

Alle sammen!

- Da $x \mapsto \tau_2(x) = x - 2$ er kontinuert og dermed målelig, slutter vi ved Theorem 7.4 at sammensætningen $x \mapsto u(x-2)$ er målelig.
- Da $x \mapsto e^x$ er kontinuert og dermed målelig, slutter vi som ovenfor, at $x \mapsto e^{u(x)}$ er målelig.
- Funktionen $x \mapsto \sin(x+8)$ er kontinuert og dermed målelig, så det følger som ovenfor at $x \mapsto \sin(u(x)+8)$ er målelig.
- Hvis u er to gange differentiabel, følger det ved at bruge Opgave 7.12 to gange at u'' er målelig.
- Vi har, at

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Skriver vi $\operatorname{sgn}(x) = 1_{(0,\infty)}(x) - 1_{(-\infty,0)(x)}$, ser vi straks at sgn er målelig jf. Examples 8.5 (i) og Corollary 8.10. Sammensætningen $x \mapsto \operatorname{sgn}(u(x-7))$ er da af målelige funktioner sgn, u og $x \mapsto \tau_7(x) = x - 7$, hvormed den selv er målelig.

8.18

Vis, at enhver voksende funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelig. Under hvilke ekstra antagelser gælder $\sigma(u) = \mathcal{B}$?

Vi vil vise, at $\{u < \lambda\}$ er et interval (som vinket i bogen foreslår); da Borel-algebraen $\mathcal{B}$ indeholder alle intervaller, følger af Lemma 8.1, at u er $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelig. Lad $\lambda \in \mathbb{R}$ og betragt

$$C_\lambda = \{y \in \mathbb{R} \mid u(y) = \lambda\}.$$

Hvis $C_\lambda = \emptyset$, er der tre tilfælde:

- For alle $x \in \mathbb{R}$ vil $u(y) < \lambda$. I dette tilfælde er $\{u < \lambda\} = \mathbb{R}$.
- For alle $x \in \mathbb{R}$ vil $u(y) > \lambda$. Her vil $\{u < \lambda\} = \emptyset$.
- Der findes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ og $u(x_1) < \lambda < u(x_2)$. Nu vil $\{u < \lambda\}$ være ikke-tom. Endvidere er denne mængde opadtil begrænset af x_2: hvis $u(x) < \lambda$ for et $x \in \mathbb{R}$, vil $u(x) < u(x_2)$. Der kan ikke gælde, at $x > x_2$, thi dette ville medføre $u(x) \geq u(x_2)$, så $x \leq x_2$. Altså har $\{u < \lambda\}$ et supremum x_0 i $\mathbb{R}$. Tilsvarende vil $\{u > \lambda\}$ have et infimum. Vi påstår, at

$$\sup\{u < \lambda\} = \inf\{u > \lambda\}.$$

Lad $x \in \{u < \lambda\}$ være fast. Hvis $y \in \{u > \lambda\}$ er vilkårlig, har vi, at $u(x) < \lambda < u(y)$. Af dette kan ikke gælde, at $x \geq y$, så $x < y$. Da y var vilkårlig i $\{u > \lambda\}$, er x et undertal for $\{u > \lambda\}$, så $x \leq \inf\{u > \lambda\}$. Da x var vilkårligt valgt, vil $\sup\{u < \lambda\} \leq \inf\{u > \lambda\}$. Et tilsvarende argument viser den anden ulighed, således at ligheden gælder. Bemærk, at $\{u < \lambda\} \subseteq (-\infty, x_0]$, da x_0 er supremum for $\{u < \lambda\}$. Der er nu to undermuligheder:

  - Hvis $u(x_0) < \lambda$, vil der for alle $x \leq x_0$ gælde, at $u(x) \leq u(x_0) < \lambda$, således at $(-\infty, x_0] \subseteq \{u < \lambda\}$.
  - Hvis $u(x_0) > \lambda$, kan der for ingen $x \in \{u < \lambda\}$ gælde, at $x \geq x_0$, idet det ville medføre $u(x) \geq u(x_0) > \lambda$. Altså vil $\{u < \lambda\} \subseteq (-\infty, x_0)$. Hvis vi har omvendt har $x < x_0$, kan der ikke gælde at $u(x) > \lambda$; dette ville medføre, at $x \in \{u > \lambda\}$, hvormed $x_0 = \inf\{u > \lambda\} \leq x$. Altså må $u(x) < \lambda$, så vi slutter, at $\{u < \lambda\} = (-\infty, x_0)$.

Vi slutter, at der enten gælder $\{u < \lambda\} = (-\infty, x_0]$ eller $\{u < \lambda\} = (-\infty, x_0)$.

Altså er $\{u < \lambda\}$ et interval under antagelsen at $C_\lambda = \emptyset$.

Hvis $C_\lambda \neq \emptyset$, findes der altså $x_1 \in \mathbb{R}$ så $u(x_1) = \lambda$. Bemærk, at $u(y) \geq u(x_1) \geq \lambda$ for alle $y > x_1$. Hvis $u(x) = \lambda$ for alle $x \leq x_1$, vil der derfor gælde, at $u(x) \geq \lambda$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvormed $\{u < \lambda\} = \emptyset$ og dermed et interval. Antag derfor i stedet, at der findes $x_2 \leq x_1$ således at $u(x_2) \neq \lambda$. Da u er voksende, må dette medføre, at $u(x_2) < \lambda$. Altså er $\{u < \lambda\}$ ikke-tom, og endvidere opadtil begrænset af x_1: hvis $u(x) < \lambda = u(x_1)$, kan ikke gælde, at $x > x_1$. Altså har $\{u < \lambda\}$ et infimum x_0. På samme måde som ovenfor kan vises, at $C_\lambda = \{u = \lambda\}$ har et supremum, og at

$$\sup\{u < \lambda\} = \inf C_\lambda.$$

Som før har vi, at $\{u < \lambda\} \subseteq (-\infty, x_0]$. Vi har nu igen to muligheder:

- Hvis $u(x_0) < \lambda$, vil der for alle $x \leq x_0$ gælde, at $u(x) \leq u(x_0) < \lambda$, således at $(-\infty, x_0] \subseteq \{u < \lambda\}$.
- Hvis $u(x_0) \geq \lambda$, må der gælde lighed, idet $x_0 \leq y$ for alle $y \in C_\lambda$, hvormed

  $$\lambda \leq u(x_0) \leq u(y) = \lambda.$$

  Der kan nu ikke for $x \in \{u < \lambda\}$ gælde, at $x \geq x_0$, idet det ville medføre $u(x) \geq u(x_0) = \lambda$. Altså vil $\{u < \lambda\} \subseteq (-\infty, x_0)$. Hvis vi har omvendt har $x < x_0$, må vi have $u(x) \leq u(x) = \lambda$. Hvis der gjaldt lighed, ville $x_0 = \inf\{u \geq \lambda\} \leq x$, en modstrid. Altså må $u(x) < \lambda$, så vi slutter, at $\{u < \lambda\} = (-\infty, x_0)$.

Vi slutter, at der enten gælder $\{u < \lambda\} = (-\infty, x_0]$ eller $\{u < \lambda\} = (-\infty, x_0)$, så vi slutter, at $\{u < \lambda\}$ altid er et interval!

Hvis $\sigma(u) = \mathcal{B}$, ville $\{x\} \in \sigma(u)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (da $\{x\}$ er afsluttet). Jf. Opgave 8.14 ville u være injektiv, så u måtte dermed være strengt voksende. Hvis u er strengt voksende, er det hurtigt at tjekke, at

$$[a, b) = \{u < u(b)\} \setminus \{u < u(a)\} \in \sigma(u),$$

i hvilket tilfælde $\sigma(u)$ indeholder alle halvåbne intervaller, og dermed indeholder $\mathcal{B}$, idet $\sigma(u)$ er en σ-algebra, og $\mathcal{B}$ er frembragt af alle halvåbne intervaller. Altså har vi, at

$$\sigma(u) = \mathcal{B} \Leftrightarrow u \text{ er strengt voksende}.$$